

L'APOCALYPSE SELON GALOIS



LA RÉVÉLATION
DES SYMÉTRIES CACHÉES

L'apocalypse selon Galois

LA RÉVÉLATION
DES SYMÉTRIES CACHÉES

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

CLEMENTINIUM

<https://clementinium.com>

Copyright © 2026 William de France

Tous droits réservés.

Extrait gratuit — Prologue et chapitres 1–2.

Le livre complet est disponible sur <https://clementinium.com>.

*« Les mathématiques sont l'art de donner
le même nom à des choses différentes. »*

Henri Poincaré

Table des matières

Prologue	I
 L'IMPOSSIBILITÉ	 3
1 Les scribes et la formule	4
2 La course de la Renaissance	8
3 L'impossible	
4 Le monde des racines	
5 Les symétries invisibles	
6 Le groupe	
7 Résolubles et irréductibles	
8 Le théorème	
9 La nuit et le duel	

LE DÉPLOIEMENT

- 10 Le siècle de Jordan
- 11 Les symétries du monde physique
- 12 L'arithmétique profonde
- 13 Les représentations
- 14 Premier dévoilement

LA CORRESPONDANCE

- 15 La lettre
- 16 Les deux mondes
- 17 Le nombre 691
- 18 Fermat tombe
- 19 Le local, le global, et la formule des traces
- 20 Le lemme fondamental
- 21 Le Langlands géométrique
- 22 La preuve de 2024
- 23 Le rendez-vous avec la physique
- 24 Le voile levé

PROLOGUE

La bougie ne tenait plus qu'à un pouce de cire. Le jeune homme la déplaça vers le bord de la table, loin des feuillets, et reprit sa plume. Il avait vingt ans. Dans quelques heures, il se battrait en duel. Il le savait depuis la veille.

Ce qu'il écrivait n'était pas un testament. Ce n'était pas une lettre d'amour ni un manifeste politique. C'étaient des mathématiques. Des notes en marge de mémoires que personne n'avait lus, des corrections griffonnées en hâte, des fragments d'une théorie dont il était le seul dépositaire. Il écrivait à son ami Chevalier, le seul à qui il pouvait confier l'essentiel. Dans la marge d'un brouillon, il griffonna : « Je n'ai pas le temps. »

Ce qu'il voyait, cette nuit-là, c'étaient les symétries invisibles des équations. Il voyait qu'à chaque équation correspond un ensemble de transformations, et que la structure de cet ensemble décide si l'équation peut être résolue par une formule ou si elle résiste à jamais. Il voyait que l'impossibilité n'est pas un mur aveugle, mais le signe d'une architecture. Et il voyait, plus loin encore, que cette architecture s'étend bien au-delà des équations, vers des territoires dont il ne pouvait qu'entrevoir les contours.

Évariste Galois mourut le lendemain, le 31 mai 1832. Quatorze ans plus tard, Joseph Liouville publia ses manuscrits. Le monde mit un siècle à les déplier.

Le mot grec *apokalypsis* ne désigne pas une catastrophe. Il désigne un dévoilement : le geste de retirer un voile qui recouvrait quelque chose de présent mais invisible. Ce livre raconte un tel dévoilement. Il commence bien avant Galois, avec les scribes de Mésopotamie qui gravaient des recettes de calcul sur des tablettes d'argile. Il ne finit pas avec lui. L'idée que Galois a entrevue dans une nuit trop

courte a grandi au-delà de ce qu'il pouvait imaginer. Elle a irrigué la physique, la géométrie, la théorie des nombres. Elle a engendré, un siècle plus tard, le programme de Langlands, un dictionnaire entre des mondes mathématiques que tout semblait séparer. Et en 2024, une preuve a montré que ce dictionnaire, dans sa version géométrique, est une identité de structures.

Trois dévoilements. Trois voiles levés. L'histoire qui suit les raconte dans l'ordre où ils sont apparus.

ACTE PREMIER

L'IMPOSSIBILITÉ

I

LES SCRIBES ET LA FORMULE

Vers 2000 avant notre ère, dans une ville de Mésopotamie dont le nom s'est perdu, un scribe pressa son calame sur une tablette d'argile fraîche. Il écrivait une recette. Pas une recette de cuisine, pas un rituel religieux, mais un procédé de calcul : étant donné un carré dont on connaît l'aire, trouver la longueur du côté. Le scribe ne possédait pas notre notation algébrique. Il ne parlait pas d'inconnues ni d'équations. Il formulait le problème en mots, des mots akkadiens ou sumériens dont la traduction exacte fait encore débattre les assyriologues. Mais la méthode qu'il consignait sur l'argile, une suite d'opérations arithmétiques appliquées aux données du problème, est essentiellement celle que les écoliers du monde entier apprennent encore aujourd'hui. Les scribes babyloniens résolvaient le second degré.

Ils ne le savaient pas. L'idée même d'une équation du second degré suppose une abstraction qui n'existait pas encore. Les scribes travaillaient sur des problèmes concrets : des champs à mesurer, des volumes à calculer, des parts d'héritage à distribuer. Un de ces problèmes, consigné sur la tablette connue aujourd'hui sous le nom de YBC 6967, conservée à l'université de Yale, demande ceci : trouver deux nombres dont le produit vaut 60 et dont la différence vaut 7. Le scribe donne la réponse par étapes, divisant, élevant au carré, extrayant une racine, additionnant. La procédure est celle que nous reconnâtrions comme la résolution de $x^2 - 7x - 60 = 0$, mais le scribe ne l'écrivait jamais ainsi. Chaque problème recevait sa propre recette, et ces recettes étaient consignées sur des tablettes qui servaient de manuels d'enseignement dans les écoles de scribes. Des centaines de ces tablettes ont survécu. Elles montrent une

maîtrise impressionnante du calcul numérique, un sens aigu de la régularité, et, par endroits, ce qui ressemble à une intuition de la structure sous-jacente. Mais entre la recette du scribe et la formule du mathématicien, il y a un gouffre conceptuel que seuls les siècles combleront.

Ce gouffre, c'est la notion de *résolubilité par radicaux*. Pour le mesurer, il faut comprendre ce que les mathématiciens entendent quand ils disent qu'une équation est « résolue ». Le mot ne signifie pas simplement qu'on a trouvé un nombre qui convient. Il ne signifie pas qu'on a obtenu une approximation, aussi précise soit-elle, ni qu'un algorithme converge vers la bonne valeur après un nombre infini d'étapes. Résoudre une équation, au sens strict de l'algèbre classique, c'est écrire ses racines sous forme explicite : une expression finie, construite à partir des coefficients de l'équation en n'utilisant que cinq opérations. Les quatre premières sont les opérations ordinaires de l'arithmétique : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Elles ne mènent pas bien loin. Si les coefficients de l'équation sont des nombres rationnels, des fractions ordinaires, les quatre opérations ne produisent que d'autres nombres rationnels. On reste dans le même monde. C'est la cinquième opération, l'extraction de racines, qui permet de franchir la frontière. Extraire une racine carrée, une racine cubique, une racine n -ième, c'est fabriquer des nombres qui n'existaient pas dans le monde de départ. C'est l'outil qui donne à la formule sa force.

La formule du second degré est le cas le plus familier. Étant donné l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule le discriminant $b^2 - 4ac$, on en extrait la racine carrée, et les deux racines se lisent immédiatement. La formule tient en une ligne. Elle fonctionne quels que soient les coefficients. Elle est universelle, au sens le plus fort du terme : elle ne dépend pas des valeurs particulières de a , b et c . Que les coefficients soient petits ou grands, positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, la même recette s'applique et produit la réponse. Derrière son apparente simplicité se cache un fait remarquable : une seule extraction de racine suffit. On entre

dans le calcul avec des nombres rationnels, on effectue quelques additions et multiplications, on extrait une racine carrée, et l'on ressort avec la réponse. L'opération est nette, définitive, sans bavure. Le scribe babylonien, avec ses mots et ses tablettes, faisait exactement cela, sans le vocabulaire qui permet de le dire.

La puissance de cette formule mérite qu'on s'y arrête, car elle contient en germe tout ce qui va suivre. Résoudre une équation par radicaux, c'est construire un chemin qui part des coefficients et arrive aux racines en n'empruntant que les cinq opérations. Ce chemin est fini. Il a un début et une fin. Le nombre d'étapes est déterminé à l'avance. Et la dernière étape, celle qui extrait la racine, est aussi celle qui crée le nombre véritablement nouveau, celui qui n'existait pas dans le monde des coefficients. Sans l'extraction de racine, on ne sort jamais du territoire des rationnels. Avec elle, on atteint des nombres irrationnels, des nombres que les Grecs connaissaient déjà, comme $\sqrt{2}$, mais dont la nature profonde ne serait comprise que bien plus tard.

Le vocabulaire qui permet de dire tout cela, les mathématiciens ont mis des siècles à le forger. La formule du second degré était connue, sous une forme ou une autre, depuis l'Antiquité. Les Grecs la reformulèrent en termes géométriques, construisant les racines à la règle et au compas. Euclide, dans les *Éléments*, proposait des constructions qui reviennent à résoudre des équations du second degré, mais dans le langage des longueurs et des aires, sans jamais écrire un symbole algébrique. Les mathématiciens arabes franchirent un pas décisif. Al-Khwarizmi, à Bagdad au IX^e siècle, rédigea un traité dont le titre, *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala*, donna son nom à l'algèbre. Il y classait les équations du second degré en six types et donnait pour chacun une méthode de résolution systématique. Pour la première fois, la résolution des équations devenait un art organisé, avec ses règles et ses procédures. Mais pendant tout ce temps, le second degré resta le sommet de l'art. Les équations de degré supérieur résistaient. On savait résoudre certains cas particuliers, on disposait de méthodes numériques

pour approcher les racines, mais la question fondamentale restait ouverte : existe-t-il une formule pour le troisième degré ? Pour le quatrième ? Pour le cinquième ?

Pendant plus de trois mille ans, le second degré demeura la frontière. Les Indiens, Brahmagupta au VII^e siècle, Bhaskara au XII^e, perfectionnèrent les méthodes. Les mathématiciens médiévaux européens, formés à l'école arabe, les transmirent et les adaptèrent. Mais personne ne franchit le seuil du troisième degré. La question restait suspendue, comme une promesse non tenue : si le second cède à une formule, le troisième doit céder aussi. La confiance était intacte. L'algèbre avait toujours fini par trouver la formule. Il suffisait de chercher assez longtemps, avec assez d'ingéniosité.

Nous verrons bientôt comment la Renaissance italienne força les portes du troisième et du quatrième degré, dans des circonstances qui tenaient autant du duel intellectuel que de la recherche patiente. Mais avant de raconter cette course, il faut retenir la leçon que le second degré enseigne déjà. Résoudre une équation par radicaux, c'est descendre les coefficients à travers une suite d'opérations élémentaires, dont la dernière, l'extraction de racine, est la seule qui crée véritablement quelque chose de neuf. La formule du second degré n'exige qu'une seule extraction. Celles du troisième et du quatrième en exigeront davantage, imbriquées les unes dans les autres avec une complexité croissante. Et cette croissance de la complexité portera en elle un avertissement que personne, pendant longtemps, ne saura lire.

Les tablettes d'argile ont survécu quatre mille ans. Les formules qu'elles contiennent fonctionnent toujours. Mais la question qu'elles posaient en silence, la question de savoir jusqu'où le vocabulaire des cinq opérations peut mener, cette question attendrait près de quatre millénaires avant de recevoir sa réponse. Trois mille cinq cents ans séparent les scribes de Mésopotamie des algébristes de la Renaissance. Puis, dans l'Italie du XVI^e siècle, la course reprend.

LA COURSE DE LA RENAISSANCE

À Bologne, en février 1535, une foule se pressa dans une salle où deux mathématiciens allaient s'affronter. Le défi était public, comme c'était l'usage dans l'Italie de la Renaissance : chaque concurrent soumettait à l'autre une liste de trente problèmes, et celui qui en résolvait le plus dans le temps imparti remportait la victoire, un banquet et la réputation qui l'accompagnait. D'un côté, Antonio Maria Fior, élève du regretté Scipione del Ferro, armé d'une méthode secrète que son maître lui avait transmise sur son lit de mort. De l'autre, Niccolò Fontana, surnommé Tartaglia, le bègue, un autodidacte de Brescia qui avait appris les mathématiques seul après que des soldats français lui eurent tailladé le visage dans l'enfance. Fior possédait la formule pour un type particulier d'équations cubiques. Il croyait que cela suffirait. Il se trompait.

Tartaglia résolut les trente problèmes de Fior en deux heures. Fior n'en résolut aucun des siens. La victoire était totale. Tartaglia avait trouvé, dans les jours précédant le concours, une méthode générale pour les cubiques, et il l'avait gardée pour lui. Ce secret valait de l'or, au sens propre : les chaires universitaires se gagnaient dans ces joutes publiques, et la formule était l'arme décisive. Tartaglia n'avait aucune intention de la partager.

Il la partagea quand même. Gerolamo Cardano, médecin, mathématicien, astrologue, joueur, l'un des esprits les plus brillants et les plus troubles de son siècle, le persuada de la lui confier sous le sceau du secret. Tartaglia céda, non sans réticence, en 1539. Cardano jura de ne rien publier. Puis il publia. En 1545, dans son *Ars Magna*, il exposa la méthode complète de résolution du troisième degré, attribuant la découverte initiale à del Ferro et la généralisation à

Tartaglia. Tartaglia cria à la trahison. La querelle empoisonna les douze dernières années de sa vie.

L'affaire était humaine, mesquine, pleine de rancœur et de vanité blessée. Mais la formule, elle, était magnifique. Magnifique et redoutable. Pour résoudre l'équation réduite $x^3 + px + q = 0$, la formule de Cardano s'écrit :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Deux racines cubiques imbriquées dans une racine carrée. L'expression est déjà d'une complexité notable. Mais le plus troublant n'est pas sa longueur. C'est qu'elle recèle un piège : dans certains cas, lorsque l'équation a trois racines réelles distinctes, la formule fait apparaître des racines carrées de nombres négatifs. L'équation a des solutions parfaitement réelles, que l'on peut tracer sur un graphe, mais la formule passe par des quantités qui ne sont pas des nombres réels. On les appellera plus tard les nombres *imaginaires*. Cardano lui-même nota le phénomène avec perplexité, le qualifiant de « subtil au point d'être inutile ». Mais la formule fonctionnait. En combinant ces quantités étranges selon les règles du calcul, on retombait toujours sur les bonnes racines. Les nombres imaginaires n'étaient pas un défaut de la méthode. Ils étaient le prix à payer pour descendre dans les profondeurs de l'équation et en remonter avec la solution.

L'histoire de la formule cubique est celle d'un secret qui ne pouvait pas le rester. Del Ferro avait trouvé la méthode le premier, vers 1515, dans son bureau de l'université de Bologne. Il ne publia rien. Il la confia à son élève Fior, qui la perdit dans le duel contre Tartaglia. Tartaglia la confia à Cardano, qui la publia. Trois hommes, trois trahisons de confiance, et au bout du chemin une formule qui appartenait désormais au monde. Les mathématiques avançaient parfois ainsi : non par la générosité de leurs découvreurs, mais malgré leur avarice.

Le quatrième degré tomba presque immédiatement. Lodovico Ferrari, élève de Cardano, âgé de dix-huit ans à peine, trouva une méthode en 1540. L'idée consistait à ramener l'équation du quatrième degré à une équation auxiliaire du troisième, que l'on savait désormais résoudre. La formule qui en résultait était monstrueuse. Trois extractions de racines imbriquées, des expressions qui remplissaient une page entière, des cas de figure multipliés. Mais le principe tenait : on combinait les cinq opérations élémentaires, et l'on finissait par atteindre les racines. Ferrari avait prouvé que le quatrième degré était résoluble par radicaux. Cardano publia ce résultat aussi dans l'*Ars Magna*.

Le troisième degré en une décennie, le quatrième presque dans la foulée. La progression semblait irrésistible. En trois quarts de siècle, l'algèbre italienne avait conquis deux forteresses que trois mille ans de mathématiques avaient laissées intactes. La confiance était totale : le cinquième degré céderait à son tour. Il suffisait de trouver la bonne substitution, le bon artifice, le bon angle d'attaque.

Mais quelque chose d'inquiétant se manifestait dans cette progression triomphale. La formule du second degré tient en une ligne. Celle du troisième occupe un paragraphe. Celle du quatrième demande une page. À chaque degré, la complexité ne s'ajoutait pas : elle se multipliait. Les racines s'emboîtaient les unes dans les autres comme des poupées russes, chaque couche ajoutant une extraction de plus. Le second degré n'exigeait qu'une racine carrée. Le troisième y ajoutait deux racines cubiques. Le quatrième empilait le tout. Ce n'était pas un simple allongement. C'était un changement de nature. La difficulté ne croissait pas arithmétiquement ; elle croissait structurellement, comme si chaque degré supplémentaire ajoutait non pas une marche de plus à un escalier, mais un étage entier à un bâtiment dont l'architecture se compliquait à chaque niveau.

Cet avertissement, personne ne sut le lire. Pendant près de deux siècles, les meilleurs esprits d'Europe cherchèrent la formule du cinquième degré. Euler, le plus prolifique de tous les mathémati-

ciens, s'y essaya et n'y parvint pas. Lagrange, à la fin du XVIII^e siècle, entreprit une étude systématique de la question avec une profondeur sans précédent. Il examina les méthodes qui avaient fonctionné pour les degrés 2, 3 et 4, chercha à comprendre ce qui les rendait possibles, et découvrit que toutes reposaient sur une idée commune : certaines combinaisons des racines, appelées *résolvantes*, possèdent des propriétés de symétrie qui les rendent accessibles au calcul. Pour les degrés inférieurs, ces résolvantes avaient toujours un degré plus bas que l'équation de départ, ce qui permettait de les résoudre d'abord et de remonter ensuite vers les racines. Mais au degré 5, la résolvante de Lagrange était de degré 6. Au lieu de simplifier le problème, elle le compliquait. Lagrange nota ce fait avec une lucidité remarquable, mais il n'en tira pas la conclusion ultime. Il avait posé les fondations d'un édifice dont il ne pouvait pas encore voir le sommet.

Tschirnhaus, Bézout, Bring, Jerrard, tant d'autres encore poussèrent les calculs dans toutes les directions. On tenta des substitutions ingénieuses, des réductions de forme, des méthodes de descente. Personne ne trouva. Le soupçon grandit lentement : peut-être la formule n'existait-elle pas. Non pas qu'elle fût simplement trop compliquée pour être écrite, mais qu'elle fût, en un sens rigoureux, impossible. L'idée avait quelque chose de vertigineux. L'habitude de plusieurs siècles avait inscrit dans l'esprit des mathématiciens une équivalence tacite entre « équation » et « formule ». Chaque équation, pensait-on, devait posséder la sienne ; il suffisait de la découvrir. Remettre en cause cette équivalence, c'était repenser la nature même de ce que signifie résoudre. Comment prouver qu'une chose n'existe pas ? Comment montrer, non pas qu'on n'a pas trouvé, mais qu'il n'y a rien à trouver ? Un tel argument ne relèverait plus du calcul. Il relèverait de la structure.

Le troisième degré était tombé dans le fracas des duels bolonais. Le quatrième avait cédé dans la foulée. Restait le cinquième. Deux siècles de recherche n'y changeraient rien.

VOUS VENEZ DE LIRE LE PROLOGUE ET LES DEUX PREMIERS CHAPITRES.

Le livre complet contient 24 chapitres en trois actes :

ACTE PREMIER — L'impossibilité

Les scribes et la formule · La course de la Renaissance · L'impossible · Le monde des racines · Les symétries invisibles · Le groupe · Résolubles et irréductibles · Le théorème · La nuit et le duel

ACTE DEUXIÈME — Le déploiement

Le siècle de Jordan · Les symétries du monde physique · L'arithmétique profonde · Les représentations · Premier dévoilement

ACTE TROISIÈME — La correspondance

La lettre · Les deux mondes · Le nombre 691 · Fermat tombe · Le local, le global, et la formule des traces · Le lemme fondamental · Le Langlands géométrique · La preuve de 2024 · Le rendez-vous avec la physique · Le voile levé

Plus quatre annexes : glossaire, chronologie, galerie des figures, bibliographie commentée.

CLEMENTINIUM.COM

12,99 € · PDF tablette + mobile · sans DRM