



Cours articulé
de
mathématiques

V

Physique mathématique

DES SYMÉTRIES AUX CORDES

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Clem

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Les mathématiques sont le langage dans lequel Dieu a écrit l'univers.

GALILÉE

Cours articulé
de
mathématiques

V

Physique mathématique

DES SYMÉTRIES AUX CORDES

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Copyright © 2026 William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Collection COURS ARTICULÉ DE MATHÉMATIQUES

Tous droits réservés.

AVANT-PROPOS

Ce cinquième volume étudie comment les structures mathématiques deviennent des descriptions physiques. Une symétrie indique des transformations possibles ; elle ne choisit pas seule une dynamique. Une action donne des équations ; elle ne détermine pas encore leur quantification. Une théorie effective produit des prédictions à une précision fixée ; elle ne prétend pas décrire toutes les échelles.

Le parcours suit ces distinctions. La mécanique, les représentations et la relativité préparent les états quantiques et les systèmes collectifs. La géométrie des champs conduit à la quantification, aux changements d'échelle et aux théories de jauge. Les secteurs exacts et les dualités ouvrent ensuite la construction des cordes et les dictionnaires holographiques. Un chemin descendant retrouve enfin certains régimes physiques par des limites calculées, avant de confronter les constructions à leurs paramètres libres et aux autres voies vers la gravité quantique.

Les quarante-quatre chapitres réunissent quatre cent six articles. Chacun développe une idée par un calcul dont les hypothèses et la portée restent visibles. Les lectures complémentaires permettent de rejoindre les sources. Une question de recherche résolue prolonge chaque chapitre : elle éprouve une construction ou distingue deux opérations ; elle ne prétend pas résoudre un problème ouvert général.

Le volume IV conduit au Langlands géométrique et au parcours de sa preuve dans le cadre étudié. Ici, sa lecture physique revient avec les dualités de jauge et les branes, sans être confondue avec cette preuve. Les deux volumes se répondent ; chacun peut être abordé depuis les outils du volume III.

W. de F.

AU LECTEUR

Ce cours articule en cinq volumes la grammaire par laquelle la réalité se compose elle-même : des articles de mathématiques, du premier nombre entier à la correspondance de Langlands et de la brachistochrone à l'amplituède. L'entreprise est vaste. L'auteur ne prétend pas qu'elle soit sans défauts ; il affirme qu'elle est sincère.

Chaque article développe une seule idée, de sa motivation à son interprétation. Les définitions sont encadrées ; les théorèmes majeurs le sont également, en rouge, dans les volumes 2 et 3 de la collection. Les preuves sont présentes là où elles éclairent, esquissées là où la rigueur complète aurait obscurci le propos, et admises lorsque leur difficulté excède le cadre de l'article. Le lecteur saura distinguer les trois cas.

Les figures accompagnent les calculs ; elles montrent les objets et les régimes que le texte précise. Une même structure réapparaît sous plusieurs formes au fil du parcours. Ce retour permet de mesurer ce qu'une nouvelle description conserve et ce qu'elle ajoute.

Chaque chapitre se prolonge par des Lectures complémentaires, choisies pour rejoindre les sources et approfondir les constructions, puis par des Questions de recherche. Celles-ci invitent à prolonger un exemple, préciser une hypothèse ou comparer deux opérations. Lorsqu'une conjecture intervient, son statut est distingué des résultats démontrés ; toutes ces questions ne sont pas des problèmes ouverts au sens de la recherche actuelle.

Le lecteur peut suivre le chemin linéaire ou emprunter les passages transversaux entre volumes. Les volumes I à III forment une progression continue du lycée à la maîtrise. Le volume IV s'élève vers le programme de Langlands ; le volume V, vers la physique mathématique. Tous deux supposent le volume III mais peuvent se lire indépendamment l'un de l'autre.

Toute erreur signalée est une erreur corrigée.

wdf@clementinium.com

NOTE SUR LES CYCLES

Les cinq volumes de la collection accompagnent une progression, des premiers objets mathématiques aux questions de recherche :

- *Éléments (I) : les mathématiques de l'enseignement secondaire, de l'arithmétique aux premières preuves.*
- *Licence (II) : les fondements des études universitaires de mathématiques.*
- *Maîtrise (III) : les approfondissements et la préparation à la recherche.*
- *Correspondances (IV) : le cycle de recherche, du corps de classes au programme de Langlands.*
- *Physique mathématique (V) : le cycle de recherche, des symétries aux cordes.*

Ces niveaux orientent la lecture sans imposer un calendrier universitaire. Les parties et les chapitres donnent les étapes du parcours ; le rythme dépend des acquis du lecteur et des questions qu'il souhaite approfondir.

Les volumes I, II et III construisent successivement les prérequis qui permettent d'aborder le suivant. Le lecteur peut entrer directement au niveau dont il possède les acquis. Les volumes IV et V partagent le socle de la Maîtrise et peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. Les passerelles en début de volume précisent le changement de perspective.

NOTATIONS

Les conventions locales sont précisées dans les articles ; une même lettre peut changer de rôle selon le secteur. Les couplages électromagnétiques ci-dessous utilisent les unités rationalisées.

$\hbar$	constante de Planck réduite $\hbar/2\pi$
c	vitesse de la lumière dans le vide
G	constante de gravitation de Newton (ou un groupe de Lie, selon le contexte)
k_B	constante de Boltzmann
e	charge élémentaire
α	constante de structure fine $e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$
ℓ_P	longueur de Planck $\sqrt{\hbar G/c^3}$
$q, \dot{q}$	coordonnées généralisées, vitesses généralisées
p	impulsion conjuguée
$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$	lagrangien
$H(q, p, t)$	hamiltonien
$S[q]$	fonctionnelle d'action
$\{f, g\}$	crochet de Poisson
ω	forme symplectique
$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$	application moment
$\mathcal{H}$	espace de Hilbert (ou hamiltonien, selon le contexte)
$ \psi\rangle, \langle\phi $	ket, bra (notation de Dirac)
$\langle\phi \psi\rangle$	produit scalaire
$\hat{A}$	opérateur associé à l'observable A
X, P	opérateurs position et impulsion
$[A, B]$	commutateur $AB - BA$
ΔA	écart-type (incertitude) de l'observable A
σ_i	matrices de Pauli ($i = 1, 2, 3$)
$a, a^\dagger$	opérateurs d'annihilation et de création
$ n\rangle$	état propre du nombre d'occupation
ρ	matrice densité (opérateur d'état)
$S(\theta)$	matrice de diffusion
$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$	opérateur d'évolution
GL_n, SL_n	groupes linéaire, spécial linéaire

$O(n), SO(n)$	<i>groupes orthogonal, spécial orthogonal</i>
$U(n), SU(n)$	<i>groupes unitaire, spécial unitaire</i>
$Sp(2n)$	<i>groupe symplectique</i>
$SO(3, 1)$	<i>groupe de Lorentz</i>
$SL(2, \mathbb{C})$	<i>revêtement double de $SO^+(3, 1)$</i>
$\mathcal{P}$	<i>groupe de Poincaré = $SO^+(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$</i>
$\mathfrak{g}$	<i>algèbre de Lie d'un groupe G</i>
$\mathfrak{h}$	<i>sous-algèbre de Cartan</i>
$\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{su}_n, \mathfrak{so}_n$	<i>algèbres de Lie classiques</i>
$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$	<i>application exponentielle</i>
ad_X	<i>représentation adjointe, $Y \mapsto [X, Y]$</i>
$(X Y), g_{ab}$	<i>forme de Killing</i>
W	<i>groupe de Weyl</i>
Φ, Δ	<i>système de racines, racines simples</i>
$U(\mathfrak{g})$	<i>algèbre enveloppante universelle</i>
$U_q(\mathfrak{g})$	<i>groupe quantique (déformation de Drinfeld-Jimbo)</i>
$\rho : G \rightarrow GL(V)$	<i>représentation d'un groupe</i>
χ_ρ	<i>caractère de la représentation ρ</i>
j	<i>spin (demi-entier indexant les irréductibles de $SU(2)$)</i>
(j_1, j_2)	<i>représentations complexes irréductibles de dimension finie de $SL(2, \mathbb{C})$</i>
λ	<i>poids dominant (plus haut poids)</i>
$\hat{G}$	<i>groupe dual complexe; ${}^L G$ désigne le L-groupe, avec son action galoisienne</i>
$\pi : E \rightarrow M$	<i>fibré vectoriel ou principal</i>
$P \rightarrow M$	<i>fibré principal de groupe G</i>
$T_p M, T_p^* M$	<i>espace tangent, espace cotangent en p</i>
$\Omega^k(M)$	<i>k-formes différentielles sur M</i>
∇	<i>connexion (dérivée covariante)</i>
A	<i>potentiel de connexion (champ de jauge)</i>
F_A	<i>courbure d'une connexion A</i>
D_μ	<i>dérivée covariante de jauge $\partial_\mu + gA_\mu$</i>
$F_{\mu\nu}$	<i>tenseur de champ</i>
c_1, c_n	<i>classes de Chern</i>
$\hat{A}(M)$	<i>genre A (Atiyah-Singer)</i>
$\text{ind}(D)$	<i>indice d'un opérateur elliptique</i>
$YM(A)$	<i>fonctionnelle de Yang-Mills $\int F_A ^2$</i>
$CS(A)$	<i>fonctionnelle de Chern-Simons</i>
g_{YM}	<i>couplage de jauge</i>
α_s	<i>couplage fort $g_{\text{QCD}}^2/(4\pi)$</i>
$\beta(g)$	<i>fonction bêta du groupe de renormalisation</i>

ϕ, ψ, A_μ	champs scalaire, spinoriel, de jauge
$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$	densité lagrangienne
$T_{\mu\nu}$	tenseur énergie-impulsion
$\mathcal{Z}$	fonction de partition (intégrale de chemin)
$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle$	fonction de corrélation à n points
Λ	coupure ultraviolette (ou constante cosmologique)
c	charge centrale (algèbre de Virasoro)
$L_n, \bar{L}_n$	modes de Virasoro
$h, \bar{h}$	poids conformes; $\Delta = h + \bar{h}$ en dimension deux
$\mathcal{V}$	algèbre de vertex
$g_s = e^{\Phi_0}$	couplage des cordes fixé par le dilaton de fond
α'	pente de Regge (tension $T = 1/(2\pi\alpha')$)
$\ell_s = \sqrt{\alpha'}$	longueur de la corde
$\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$	axiodilaton (type IIB)
$X^\mu(\sigma, \tau)$	coordonnées de la corde dans l'espace cible
d	dimension critique ($d = 26$ bosonique, $d = 10$ super-corde)
$\mathcal{N}$	nombre de supersymétries
$Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$	supercharges
θ^α	variables de Grassmann
$W(\Phi)$	superpotentiel
$g_{\mu\nu}$	métrique de l'espace-temps
$\eta_{\mu\nu}$	métrique de Minkowski $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$
$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	symboles de Christoffel
$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$	tenseur de Riemann
$R_{\mu\nu}, R$	tenseur de Ricci, courbure scalaire
$G_{\mu\nu}$	tenseur d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$
$r_s = 2GM/c^2$	rayon de Schwarzschild
G_{SM}	groupe de jauge $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$
θ_W	angle de Weinberg
$V_{\text{CKM}}, U_{\text{PMNS}}$	matrices de mélange (quarks, neutrinos)
$v \approx 246 \text{ GeV}$	valeur dans le vide du champ de Higgs
$\beta = 1/(k_B T)$	inverse de la température
$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$	fonction de partition canonique
$M(T)$	magnétisation (paramètre d'ordre)
T_c	température critique
σ_{xy}	conductance de Hall
$ 0\rangle, 1\rangle$	base calculationnelle d'un qubit
$S(\rho)$	entropie de von Neumann $-\text{Tr}(\rho \log \rho)$
S_A	entropie d'intrication de la région A

$\mathcal{M}_H$	<i>espace de modules de Hitchin</i>
$\text{Bun}_G(X)$	<i>champ des G-fibrés sur X</i>
$\mathcal{M}_{g,n}$	<i>espace de modules des courbes de genre g à n ponctures</i>
Tr, tr	<i>trace (opérateur ou représentation)</i>
$H^k(\mathcal{M})$	<i>cohomologie de de Rham de degré k</i>
$\pi_1(X)$	<i>groupe fondamental de X</i>
$\chi(M)$	<i>caractéristique d'Euler de M</i>
$\oplus, \otimes, \wedge$	<i>somme directe, produit tensoriel, produit extérieur</i>
$\simeq, \cong$	<i>isomorphe à, homéomorphe/difféomorphe à</i>

Table des matières

Avant-propos	v
Au lecteur	vi
Note sur les cycles	vii
Notations	viii
Des correspondances aux régimes physiques	i
I Dynamique, symétries et espace-temps	2
1 Mécanique lagrangienne	3
2 Mécanique hamiltonienne	21
3 Géométrie symplectique	39
4 Groupes de Lie et symétries de l'espace-temps	53
5 Algèbres semi-simples et structures de racines	70

6	Représentations, poids et caractères	86
7	Relativité et géométrie causale	104
8	Gravitation : Einstein, trous noirs et cosmologie	123
II	États quantiques, information et systèmes collectifs	145
9	Espaces de Hilbert, opérateurs et domaines	146
10	États, observables et postulats quantiques	166
11	Systèmes quantiques fondamentaux	185
12	Information quantique, intrication et codes	207
13	Mécanique statistique et systèmes quantiques collectifs	230
III	Géométrie des champs et changements d'échelle	250
14	Fibrés et charges topologiques	251
15	Connexions, courbure et indice	268
16	Champs classiques et symétries	285
17	Théories de jauge et solutions classiques	302
18	Quantification des champs et méthodes fonctionnelles	313

19	Renormalisation, échelles et théories effectives	332
20	Anomalies et conditions de cohérence quantique	356
21	Modèle standard : structure et portée	374
22	Phases topologiques de la matière	394
IV	Structures exactes et dualités de jauge	418
23	Théories conformes et modèles sigma	419
24	Algèbres affines, vertex et structures chirales	449
25	Supersymétrie, multiplets et états BPS	480
26	Systèmes intégrables et groupes quantiques	507
27	Théories de jauge supersymétriques et dualités	538
28	Théories topologiques, invariants et symétries catégorielles	569
29	Hitchin, branes et lecture physique de Langlands	604
V	Construction des théories de cordes	637
30	De la corde classique à son spectre quantique	638
31	Supercordes, D-branes et cohérence	669

32	Amplitudes, fonctions de partition et interactions cordistes	703
33	Compactifications, symétrie miroir et cordes topologiques	732
34	Dualités, supergravité et formulations non perturbatives	764
VI	Holographie et trous noirs quantiques	795
35	Holographie : dictionnaires et régimes contrôlés	796
36	Trous noirs quantiques et comptage microscopique	824
37	Intrication, reconstruction et information des trous noirs	854
VII	Retrouver des régimes physiques par limites contrôlées	888
38	Des cordes aux théories effectives : une réduction sur le cercle	889
39	Des théories effectives aux régimes physiques	916
VIII	Confrontations, limites et autres voies	942
40	Phénoménologie : constructions et paramètres libres	943

41	Cosmologies cordistes et confrontation aux observations	966
42	Paysage, Swampland et limites des théo- ries effectives	995
43	Amplitudes modernes, bootstrap et nou- velles approches holographiques	1019
44	Autres approches de la gravité quantique	1045
	Au terme de ce volume	1071
	Bibliographie	1072
	Index des notions	1079

DES CORRESPONDANCES AUX RÉGIMES PHYSIQUES

Le volume précédent a étudié des correspondances : quels objets rapprocher, quelles opérations préserver, quelles hypothèses rendent l'identification possible. La physique reprend ces questions en leur ajoutant des états, une évolution et des observables. Deux descriptions ne s'y comparent pas seulement par leurs espaces ; elles se comparent par ce qu'elles permettent de calculer dans un même régime.

La mécanique offre un premier exemple. Une trajectoire peut être déterminée par une équation différentielle ou par la stationnarité d'une action. Le passage entre ces formulations demande des conditions au bord ; le passage à Hamilton demande encore que la transformation de Legendre soit adaptée. Les symétries peuvent alors devenir des quantités conservées. Les structures ne sont pas simplement juxtaposées : chaque lien a ses conditions.

Cette exigence accompagne tout le volume. Un opérateur quantique a un domaine ; un champ de jauge a des redondances ; une théorie effective a une échelle de validité. Les dualités, les compactifications et les dictionnaires holographiques multiplient les passages possibles, mais ne suppriment pas la nécessité de choisir un état ou de contrôler une approximation.

Le lecteur retrouvera groupes, fibrés, cohomologie et catégories. Il leur demandera maintenant quelles données physiques ils organisent, et ce qu'ils laissent indéterminé. La première étape est modeste et décisive : faire varier une trajectoire en sachant ce que l'on tient fixé.

Première partie

Dynamique, symétries et espace-temps

La mécanique commence par une trajectoire et les données qui la déterminent. Le principe variationnel conduit aux formulations lagrangienne et hamiltonienne; les symétries précisent ce qui se conserve. Groupes de Lie et représentations donnent ensuite le langage des transformations. La géométrie causale et les équations d'Einstein changent enfin le rôle de l'espace-temps : le cadre de la dynamique devient lui-même un objet dynamique.

CHAPITRE I

MÉCANIQUE LAGRANGIENNE

Reconnaître une symétrie ne suffit pas à savoir comment un système évolue. Il faut encore choisir une loi, dire ce qui peut varier et préciser les conditions auxquelles on compare les mouvements. La mécanique lagrangienne rassemble ces données dans une action. Son ambition tient à ce changement de regard : une quantité attachée au chemin entier retrouve une équation valable à chaque instant. La comparaison n'efface ni les forces ni les contraintes ; elle rend leurs effets calculables dans des coordonnées adaptées. À ce premier seuil de la physique, les correspondances entre structures laissent place à une question plus précise : quelle dynamique les données choisies déterminent-elles ?

Articles de ce chapitre :

- 001.** *Principe d'action stationnaire — Comparer les chemins ne promet pas un minimum.*
- 002.** *Équations d'Euler-Lagrange — Une variation locale impose une équation du mouvement.*
- 003.** *Symétries et théorème de Noether — La charge conserve la trace du terme de bord.*
- 004.** *Lagrangiens avec contraintes — La réaction complète la description du mouvement permis.*
- 005.** *Stationnarité, minimum et seconde variation — La durée change la nature du point critique.*
- 006.** *Brachistochrone et chaînette : une même identité — Le critère choisi décide de la courbe optimale.*

I. PRINCIPE D'ACTION STATIONNAIRE.

COMMENT une quantité calculée sur un chemin entier peut-elle exprimer une loi du mouvement valable à chaque instant ? Une force décrit ce qui arrive localement. L'action associe un nombre à une trajectoire, puis compare celle-ci à ses voisines. Le déplacement de perspective ressemble à celui d'une grammaire qui examine une phrase entière ; l'image ne prête pourtant au corps aucune intention, ni aucune connaissance de son point d'arrivée. Elle annonce une autre formulation de sa dynamique.

DÉFINITION 1.1 : Soit Q un espace de configurations, d'abord un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un *lagrangien* est une fonction lisse $L(q, v, t)$. À une courbe q sur un intervalle fixé $[t_0, t_1]$, on associe l'*action*

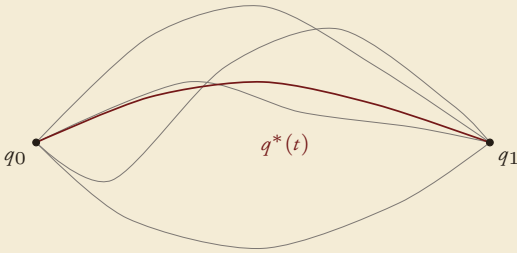
$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Une variation admissible q_ε conserve les deux positions extrêmes. Son déplacement infinitésimal $\eta = \partial_\varepsilon q_\varepsilon|_0$ s'annule donc en t_0, t_1 . La *variation première* est

$$\delta S[q] \cdot \eta = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[q_\varepsilon] \right|_0.$$

L'action est *stationnaire* si cette dérivée est nulle pour toute variation admissible.

Sur une variété, L est défini sur $TQ \times \mathbb{R}$ et $\eta(t)$ appartient à $T_{q(t)}Q$: c'est la famille de courbes qui définit la variation, même lorsqu'une seule carte ne couvre pas le trajet. Pour les calculs ci-dessous, les chemins sont de classe C^2 .



$$\delta S[q^*] = 0$$

Une famille de chemins aux mêmes extrémités. Le chemin distingué est stationnaire pour le modèle considéré ; le dessin ne représente pas les valeurs de l'action.

Le *principe de Hamilton* formule la dynamique du modèle par $\delta S = 0$. Le choix de L contient une hypothèse physique. Pour des particules soumises à un potentiel indépendant des vitesses, le modèle naturel $L = T - V$ redonnera Newton ; tout lagrangien n'a pas cette forme. La figure représente les comparaisons entre chemins, non une sélection par anticipation. Fixer deux positions à deux dates n'assure d'ailleurs ni existence ni unicité d'une trajectoire : ce problème diffère de la prescription d'une position et d'une vitesse initiales.

UN MINIMUM QUE L'ON PEUT ÉTABLIR : Pour une particule libre sur une droite, $L = m\dot{q}^2/2$, avec $m > 0$. Le chemin affine

$$q_*(t) = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{\Delta t}(t - t_0), \quad \Delta t = t_1 - t_0 > 0,$$

relie les deux bouts à vitesse constante. Tout concurrent s'écrit $q_* + \eta$, avec $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. En développant le carré, le terme croisé vaut $m\dot{q}_* \int \dot{\eta} dt = 0$. Ainsi

$$S[q_* + \eta] - S[q_*] = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \geq 0.$$

L'égalité exige $\dot{\eta} = 0$, puis $\eta = 0$ par les conditions aux bords : le minimum est ici unique. Ce résultat vient du carré positif, pas du seul mot « action ».

L'expression historique « moindre action » recouvre donc deux questions : l'annulation de la première variation et la comparaison effective des valeurs. L'oscillateur les séparera à l'article 5. Pour l'instant, il reste à comprendre comment l'annulation d'une variation sur le chemin entier impose une équation à chacun de ses instants.

2. ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE.

UNE intégrale peut s'annuler par compensation entre des régions où son intégrande a des signes contraires. La stationnarité exige davantage : l'annulation doit résister à toutes les variations du chemin, y compris celles qui ne touchent qu'un petit intervalle. Une exigence sur la trame entière peut ainsi être éprouvée fil par fil ; cette image prend un sens précis grâce à la liberté de localiser la variation.

THÉORÈME 2.1 (EULER-LAGRANGE) : Soient L de classe C^2 et q une courbe C^2 dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à extrémités fixées. L'action est stationnaire en q si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Toutes les dérivées de L sont évaluées en $(q(t), \dot{q}(t), t)$.

PREUVE : Dans les formules suivantes, un indice répété est sommé. Posons $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$. La dérivation sous l'intégrale et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned} \delta S[q] \cdot \eta &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \eta^i + p_i \dot{\eta}^i \right) dt \\ &= [p_i \eta^i]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i \right) \eta^i dt. \end{aligned}$$

Le terme de bord s'annule. Si un coefficient continu de η^i était strictement positif en un point intérieur, il le resterait dans un voisinage; une fonction test positive à support dans ce voisinage donnerait une intégrale positive. Le même argument traite un coefficient négatif. C'est le lemme fondamental du calcul des variations : chaque coefficient est nul. Réciproquement, les équations et les conditions aux bords annulent les deux termes de la dernière ligne.

Cette équivalence donne une condition locale de stationnarité, sans conclure au minimum. Si une extrémité pouvait varier, le terme de bord subsisterait et imposerait une condition supplémentaire adaptée au problème; fixer les bouts est une donnée, non une formalité de calcul.

NEWTON DANS D'AUTRES COORDONNÉES : Pour $L = m|\dot{q}|^2/2 - V(q)$, les équations deviennent $m\ddot{q} = -\nabla V$. La formulation variationnelle retrouve donc le modèle newtonien choisi. Elle survit à un changement lisse inversible de coordonnées, parce que les chemins et la valeur de leur action ne changent pas. La covariance transforme aussi les vitesses; elle ne consiste pas à substituer seulement les positions.

Dans le plan privé de l'origine, les coordonnées polaires donnent, pour la particule libre,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad r > 0.$$

Les deux équations sont

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

Le terme radial exprime la variation des directions polaires; il n'ajoute aucune interaction à la particule libre. La seconde équation conserve directement $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$.

QUAND LES ACCÉLÉRATIONS SONT DÉTERMINÉES : Les accélérations apparaissent avec la matrice

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}.$$

Si W est inversible, les équations déterminent localement $\ddot{q}$ en fonction de $(q, \dot{q}, t)$. Pour un lagrangien lisse, on obtient un système différentiel ordinaire auquel s'applique la théorie locale de Cauchy. Sans cette *régularité*, Euler-Lagrange demeure une équation implicite, susceptible de porter des contraintes. Inversibilité, positivité et minimalité ne se confondent pas.

L'impulsion p_i est attachée à une coordonnée, mais sa conservation ne dépend pas d'un choix heureux de notation. Si L ignore q^i , alors $\dot{p}_i = 0$: l'absence d'une variable dans la description signale une transformation qui laisse l'action inchangée.

3. SYMÉTRIES ET THÉORÈME DE NOETHER.

POURQUOI l'impulsion et le moment cinétique, calculés par des expressions différentes, restent-ils constants dans des situations si voisines ? Dans un cas, déplacer l'origine ne change pas le modèle ; dans l'autre, le faire tourner ne le change pas. Noether transforme cette ressemblance en un calcul : une invariance de l'action permet de lire une quantité conservée. La symétrie est un changement de perspective sur le même dessin ; mais la charge dépend de l'action et de ses bords, pas de la seule apparence du dessin.

THÉORÈME 3.1 (NOETHER À TEMPS FIXÉ) : Considérons une transformation infinitésimale $\delta q^i = \xi^i(q, t)$, sans variation de t . Supposons que, pour tout chemin,

$$\delta L = \frac{dB(q, t)}{dt}, \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \xi^i(q(t), t).$$

Le cas $B = 0$ est celui d'une invariance stricte du lagrangien. Sur toute solution d'Euler-Lagrange, la quantité conservée est

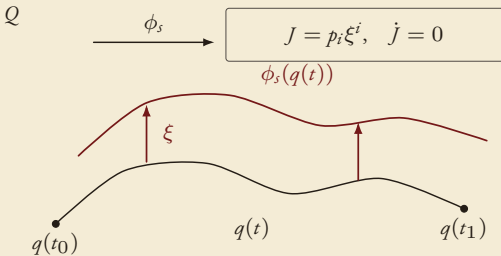
$$J = p_i \xi^i - B.$$

PREUVE : La règle de dérivation et $\dot{p}_i = \partial L / \partial q^i$ donnent

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \xi^i + p_i \dot{\xi}^i = \frac{d}{dt} (p_i \xi^i).$$

Soustraire dB/dt conclut. La condition de symétrie est une identité avant d'imposer les équations ; la conservation ne vaut qu'une fois celles-ci satisfaites.

Pour un groupe de transformations ϕ_s de Q , le générateur est $\xi = \partial_s \phi_s|_0$. La figure illustre ce cas strict. Les courbes transformées peuvent avoir des bouts différents : la symétrie n'est pas la variation à extrémités fixées employée pour établir Euler-Lagrange.



Une symétrie stricte à temps fixé transporte les solutions. Son générateur donne $J = p_i \xi^i$; les extrémités sont transportées elles aussi.

Pour $L = m|\dot{q}|^2/2 - V(q)$, une translation dans la direction e_j , lorsque V l'autorise, donne $\xi = e_j$ et $J = p_j$. Une rotation autour de e_3 , pour un potentiel invariant par cette rotation, donne $\xi = e_3 \times q$ et $J = (q \times p)_3$. La conservation de p_θ à l'article précédent est cette même propriété en coordonnées polaires.

CE QUE CHANGE UN TERME DE BORD : Pour la particule libre, prenons $q \mapsto q + \varepsilon ut$, avec u constant. Le générateur dépend ici du temps, comme le permet l'énoncé : $\xi = ut$ et $\dot{\xi} = u$. On trouve

$$\delta L = m\dot{q} \cdot u = \frac{d}{dt}(mu \cdot q), \quad J = u \cdot (tp - mq).$$

Pour toute direction u , cette quantité est constante. Avec p constant, on retrouve le mouvement affine. Omettre B aurait donné $u \cdot tp$, qui n'est généralement pas conservé : une action invariante à un terme de bord près ne fournit pas exactement la charge du cas strict.

LE TEMPS ET L'ÉNERGIE : Une translation temporelle ne relève pas du seul changement de q à temps fixé. Son effet se vérifie directement. Définissons l'énergie lagrangienne

$$E_L = p_i \dot{q}^i - L.$$

En dérivant le long d'une solution, les termes en $\ddot{q}$ se compensent et

$$\frac{dE_L}{dt} = \left(\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Un lagrangien autonome conserve donc E_L . Pour le modèle naturel, $E_L = T + V$; cette égalité n'est pas la définition générale de l'énergie. Le premier théorème de Noether étendu aux transformations du temps retrouve ce bilan, que nous venons de calculer sans supposer cette extension.

Le second théorème de Noether concerne des symétries à paramètres fonctionnels et leurs identités entre équations ; il sera repris avec la jauge. Il ne dispense pas d'étudier les charges liées aux bords. Ici déjà, conserver une quantité demande de savoir exactement ce que la transformation laisse inchangé.

4. LAGRANGIENS AVEC CONTRAINTES.

L'ANGLE d'un pendule suffit à décrire son mouvement, mais il ne dit pas directement quelle force sa tige exerce. Deux descriptions répondent à deux besoins : suivre seulement les déplacements permis, ou garder la réaction qui les impose. La première ressemble à un plan d'architecte qui épouse déjà le terrain ; le plan dispense de redessiner la contrainte, sans abolir les efforts nécessaires pour la respecter.

DÉFINITION 4.1 : Une contrainte *holonome* porte sur les positions et le temps. Écrivons $f_\alpha(q, t) = 0$, pour $\alpha = 1, \dots, k$. On suppose $D_q f$ de rang k sur leur ensemble de zéros. À temps fixé, elles définissent une sous-variété Q_t de codimension k . Un déplacement virtuel δq satisfait

$$D_q f \cdot \delta q = 0.$$

Les réactions sont dites *idéales* si leur travail virtuel $R \cdot \delta q$ est nul pour tous ces déplacements.

L'idéalité est une hypothèse physique. Elle impose que R soit une combinaison des normales $\nabla_q f_\alpha$. Dans le modèle newtonien, le principe de d'Alembert écrit ainsi $(m\ddot{q} - F) \cdot \delta q = 0$, avec sommation sur les particules. Les forces appliquées F excluent ici les réactions.

GARDER LES NORMALES : Avec le signe choisi dans l'action augmentée

$$S_\lambda = \int \left(L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt,$$

la variation des multiplicateurs impose $f_\alpha = 0$; celle de q donne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}.$$

Le membre de droite est la réaction. Les λ_α sont ses coefficients dans la famille des normales choisies, non nécessairement ses composantes cartésiennes. Ce signe correspond à $L + \lambda f$; la convention

$f - \lambda g$ de l'optimisation renomme les multiplicateurs sans changer le principe.

LE PENDULE PAR LES DEUX DESCRIPTIONS : Prenons y vers le haut, une longueur $\ell > 0$ et un angle θ depuis la verticale descendante. La paramétrisation

$$x = \ell \sin \theta, \quad y = -\ell \cos \theta$$

insère la contrainte dans $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - mgy$. Elle donne

$$L_{\text{red}} = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Une seule équation suffit au mouvement. Pour retrouver la réaction, gardons au contraire $q = (x, y)$ et

$$f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \ell^2), \quad R = \lambda q.$$

Les équations cartésiennes sont $m\ddot{x} = \lambda x$ et $m\ddot{y} = -mg + \lambda y$. Leur projection tangentielle redonne l'équation en θ . La dérivation de $q \cdot q = \ell^2$ fournit $q \cdot \ddot{q} = -|\dot{q}|^2 = -\ell^2\dot{\theta}^2$; la projection radiale donne alors

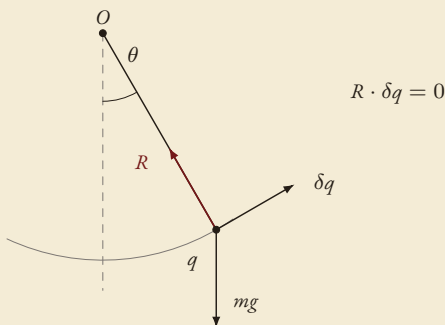
$$-m\ell^2\dot{\theta}^2 = mg\ell \cos \theta + \lambda\ell^2.$$

Ainsi la composante vers le centre vaut

$$\mathcal{T} = -\lambda\ell = m(\ell\dot{\theta}^2 + g \cos \theta).$$

Pour une tige, cette composante est signée. Pour un fil, il faut $\mathcal{T} \geq 0$ pour maintenir le modèle tendu : un fil ne pousse pas. La réaction pourrait aussi être reconstruite par Newton depuis la solution réduite; les multiplicateurs rendent son calcul explicite sans être l'unique voie.

Au point q , le déplacement permis longe le cercle; la réaction idéale lui est perpendiculaire. Le dessin isole cette géométrie, qui élimine R dans la projection tangentielle.



Pendule à $\theta = \pi/6$: la réaction représentée est dirigée vers le support. Sa longueur est illustrative ; une tige permet aussi une réaction de signe opposé. Le vecteur δq est virtuel, à temps fixé.

CE QUE LA RÉDUCTION SUPPOSE : Si la contrainte dépend du temps, les configurations forment Q_t plutôt qu'une seule variété fixe. Un mouvement admissible vérifie $D_q f \cdot \dot{q} + \partial_t f = 0$, tandis qu'un déplacement virtuel fixe t . Une réaction idéale peut donc fournir une puissance réelle : déplacer le support peut transmettre de l'énergie.

Le roulement sans glissement peut, lui, imposer des relations entre vitesses qui ne s'intègrent pas en équations de configuration. Ces contraintes *non holonomes* demandent le principe de Lagrange-d'Alembert ; les insérer naïvement dans l'action avec des multiplicateurs peut donner une autre dynamique. Restreindre les déplacements n'est pas davantage quotienter par une symétrie. Une contrainte précise ce qui peut varier ; elle ne décide pas encore si le mouvement stationnaire minimise l'action.

5. STATIONNARITÉ, MINIMUM ET SECONDE VARIATION.

ALLONGER la durée d'observation peut changer un minimum d'action en point-selle, sans changer ni la force ni l'équation du mouvement. L'oscillateur harmonique suffit à le montrer. Comme un tracé sur une surface peut cesser d'être le plus court lorsqu'on le prolonge, une trajectoire perd une propriété variationnelle au-delà d'un certain temps. L'image a sa limite : cette perte n'est pas une instabilité du mouvement oscillant.

UNE DIFFÉRENCE EXACTEMENT QUADRATIQUE : Fixons $m, \omega > 0$ et l'intervalle $[0, \Delta t]$. Pour

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2),$$

Euler-Lagrange donne $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$. Soit q_* une solution reliant les bouts prescrits. Si η s'annule aux deux bouts, le terme linéaire de $S[q_* + \eta] - S[q_*]$ vaut

$$m \int (\dot{q}_* \dot{\eta} - \omega^2 q_* \eta) dt = -m \int (\ddot{q}_* + \omega^2 q_*) \eta dt = 0.$$

Il reste exactement

$$S[q_* + \eta] - S[q_*] = \frac{m}{2} \int_0^{\Delta t} (\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2) dt.$$

La *seconde variation* $\delta^2 S[q_*](\eta, \eta)$ est la dérivée seconde de $S[q_* + \varepsilon \eta]$ en zéro : elle vaut ici deux fois ce dernier membre. Aucun terme d'ordre supérieur ne masque son signe.

LE SEUIL SE CALCULE : L'inégalité de Poincaré sur $H_0^1([0, \Delta t])$, reprise ici comme acquis d'analyse, affirme

$$\int \eta^2 dt \leq \left(\frac{\Delta t}{\pi} \right)^2 \int \dot{\eta}^2 dt.$$

Elle s'applique en particulier à nos variations lisses. Si $\Delta t < \pi/\omega$, la différence d'action est donc minorée par

$$\frac{m}{2} \left(1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\pi^2} \right) \int \dot{\eta}^2 dt > 0 \quad (\eta \neq 0).$$

La trajectoire est l'unique minimiseur pour ces bouts ; l'estimation contrôle toutes les directions à la fois.

Pour voir ce qui échoue ensuite, prenons $\eta(t) = a \sin(n\pi t/\Delta t)$, avec $n \geq 1$. L'intégrale de chaque carré trigonométrique vaut $\Delta t/2$, d'où

$$S[q_* + \eta] - S[q_*] = \frac{ma^2}{4} \left(\frac{n^2 \pi^2}{\Delta t} - \omega^2 \Delta t \right).$$

Si $\Delta t > \pi/\omega$, le mode $n = 1$ abaisse l'action, tandis qu'un mode suffisamment élevé l'augmente. Des amplitudes arbitrairement petites donnent les deux signes : toute solution au problème posé est alors un point-selle.

Au seuil $\Delta t = \pi/\omega$, la solution générale $q(t) = q_0 \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ impose $q_1 = -q_0$. Si cette condition est satisfaite, tous les b donnent la même action, et Poincaré assure des minima non stricts. Sinon, aucune solution ne relie les bouts. Le premier mode nul exprime cette rencontre des trajectoires voisines ; il fournit le premier temps conjugué dans cet exemple.

CE QU'UNE HESSIENNE NE DIT PAS SEULE : La condition nécessaire de Legendre pour un minimum local faible impose $L_{\dot{q}\dot{q}} \geq 0$ dans le cadre classique régulier. Même sa stricte positivité ne suffit pas : ici cette dérivée vaut toujours $m > 0$, y compris lorsque l'action possède une direction négative. Le critère complet fait intervenir le chemin et les conditions aux bords. Pour une fonctionnelle générale, une seconde variation positive dans chaque direction ne fournit pas à elle seule le contrôle uniforme du reste ; ici, le calcul quadratique et Poincaré ont fourni ce qui était nécessaire.

Le raccord géométrique se fait par l'énergie $\frac{1}{2} \int g(\dot{q}, \dot{q}) dt$, dont les points critiques sont les géodésiques affinement paramétrées, étudiées en géométrie riemannienne dans D2. La longueur $\int \sqrt{g(\dot{q}, \dot{q})} dt$ est au contraire invariante par reparamétrisation : sa hessienne en vitesse est dégénérée dans la direction tangentielle. Passer de l'énergie à la longueur change donc le cadre variationnel.

Chercher une trajectoire stationnaire exige une équation ; affirmer qu'elle est optimale exige encore de préciser ce que l'on compare.

6. BRACHISTOCHRONE ET CHÂÎNETTE : UNE MÊME IDENTITÉ.

UNE bille cherche le chemin le plus rapide ; une chaîne suspendue prend une forme d'équilibre. La première dessine une cycloïde, la seconde un cosinus hyperbolique. Les deux calculs partagent pourtant une identité. C'est une même règle syntaxique appliquée à deux énoncés différents : elle réduit les équations, sans rendre interchangeables le temps de parcours et l'énergie potentielle.

IDENTITÉ DE BELTRAMI : Pour une intégrande $F(y, y')$ sans dépendance explicite en x , toute solution d'Euler-Lagrange vérifie

$$F - y'F_{y'} = C.$$

En effet,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y' \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \right) = 0.$$

L'absence de x explicite fournit une intégrale première. C'est le même calcul que celui de l'énergie, au signe près, mais la variable indépendante est ici une abscisse : F n'est pas nécessairement un lagrangien mécanique.

DESCENDRE LE PLUS VITE : Une bille part du repos en A et glisse sans frottement dans une pesanteur uniforme. Avec y la profondeur sous A , l'énergie donne $v = \sqrt{2gy}$. Pour un trajet représenté par un graphe intérieur $y(x) > 0$, le temps est

$$\mathcal{T}[y] = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx.$$

Beltrami donne $F - y'F_{y'} = 1/\sqrt{2gy(1 + y'^2)}$ constant, donc

$$y(1 + y'^2) = 2a, \quad a > 0.$$

La paramétrisation

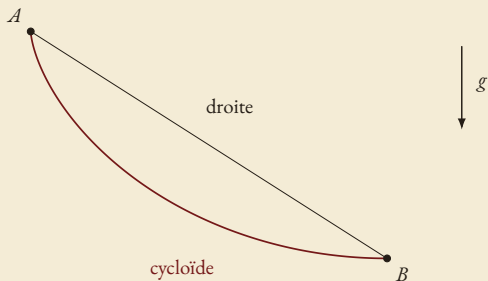
$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

la vérifie : $y' = \sin \theta / (1 - \cos \theta) = \cot(\theta/2)$. La courbe est une *cycloïde*. Pour un point final donné à droite et plus bas, a et θ_B sont fixés par les deux coordonnées.

Le départ possède une tangente verticale et l'intégrande est singulière en $y = 0$. Les équations précédentes concernent donc l'intérieur ; le temps au départ se définit par une intégrale impropre. Comme $ds = 2a \sin(\theta/2)d\theta$ et $v = 2\sqrt{ga} \sin(\theta/2)$, leur quotient se simplifie :

$$\mathcal{T}_{\text{cycl}} = \theta_B \sqrt{a/g}.$$

L'optimalité globale de cet arc, parmi les courbes admissibles rectifiables reliant les bouts, de profondeur positive hors du départ et de temps fini, est le résultat classique de la brachistochrone, admis ici. Résoudre Euler-Lagrange seul n'en constitue pas la preuve.



Pour $B = (\pi a, 2a)$ en profondeur, un véritable arc de cycloïde et la droite ont les mêmes extrémités. La courbe acquiert plus tôt de la vitesse.

La figure correspond à $\theta_B = \pi$. La droite a pour longueur $a\sqrt{\pi^2 + 4}$ et pour accélération tangentielle $2g/\sqrt{\pi^2 + 4}$. Partant du repos, elle donne

$$\mathcal{T}_{\text{droite}} = \sqrt{\pi^2 + 4} \sqrt{a/g} > \pi \sqrt{a/g} = \mathcal{T}_{\text{cycl}}.$$

Cette comparaison est calculée; elle illustre, sans le remplacer, le résultat d'optimalité parmi toutes les courbes.

SUSPENDRE UNE CHAÎNE : Prenons maintenant z vers le haut. Une chaîne homogène, de masse linéique ρ , minimise son énergie potentielle $\rho g \int z \sqrt{1 + z'^2} dx$ à longueur fixée. Un multiplicateur constant μ donne l'intégrande

$$F = (\rho g z + \mu) \sqrt{1 + z'^2}.$$

En posant $b = \mu/(\rho g)$, Beltrami devient

$$\frac{z + b}{\sqrt{1 + z'^2}} = a.$$

Sur la branche suspendue $a > 0$, écrivons $z + b = a \cosh u$. L'équation donne $z'^2 = \sinh^2 u$, puis $u' = \pm 1/a$ là où $\sinh u \neq 0$. Le prolongement lisse au point bas fournit

$$z = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - b.$$

C'est la *chaînette*. Les bouts et la longueur déterminent ses paramètres. Pour des attaches d'abscisses distinctes et une longueur supérieure à leur distance, la caractérisation minimisante usuelle est un résultat classique admis; l'identité a construit ici la candidate, non une preuve générale d'existence.

Les deux profils diffèrent parce que les fonctionnelles diffèrent. Ce qu'ils partagent est la quantité conservée par une absence de dépendance explicite. En mécanique, la combinaison $p_i \dot{q}^i - L$ invitera à choisir les impulsions comme variables : la transformation de Legendre précisera quand cette autre description conserve toute l'information.

LECTURES COMPLÉMENTAIRES

- **Noether, E.**, Invariante Variationsprobleme (1918), traduction anglaise de M. A. Tavel. Le texte fondateur distingue les groupes à paramètres constants des symétries à paramètres fonctionnels. Lire les énoncés en séparant conservation sur les solutions et identités entre équations.
- **Arnold, V. I.**, Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2^e édition, Springer, 1989. La mécanique devient une étude géométrique des configurations et des phases. Les développements variationnels et hamiltoniens prolongent ici les calculs du pendule et la question des points conjugués.
- **Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J.**, Classical Mechanics, 3^e édition, Addison-Wesley, 2002. Les deux premiers chapitres confrontent principes variationnels, coordonnées généralisées et contraintes. Reprendre les hypothèses de travail virtuel avant d'utiliser les multiplicateurs.
- **Tong, D.**, Classical Dynamics, chapitre 2. Notes accessibles pour suivre la formulation lagrangienne et les symétries. Les exemples permettent de comparer calcul newtonien et variationnel, sans attribuer à un problème à deux bouts l'unicité d'un problème de Cauchy.
- **Liberzon, D.**, Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton University Press, 2012. Le chapitre 2 distingue conditions nécessaires, suffisantes et types de minimum ; les §§2.3.4 et 2.6.2 prolongent l'identité de Beltrami et l'étude de la variation seconde.

QUESTION DE RECHERCHE

Reconnaître une dynamique variationnelle. Quelles équations du mouvement peuvent provenir d'une action, et quelles libertés subsistent dans ce choix? La seule présence de dissipation ne tranche pas. Pour $\gamma > 0$, le lagrangien

$$L = e^{\gamma t} \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

donne $d(me^{\gamma t} \dot{q})/dt + me^{\gamma t} \omega^2 q = 0$, soit l'oscillateur amorti $\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega^2 q = 0$. Son énergie mécanique $E_{\text{mec}} = m(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)/2$ satisfait pourtant $\dot{E}_{\text{mec}} = -m\gamma \dot{q}^2$. L'action dépend explicitement du temps; elle ne transforme pas cette énergie dissipée en quantité conservée.

Le problème inverse du calcul des variations étudie les conditions d'une telle reconstruction. L'exemple est résolu; il ne constitue pas une conjecture ouverte. Pour poursuivre, fixer la classe des lagrangiens autorisés, la régularité et les variables conservées, puis demander quand deux actions produisent les mêmes trajectoires. Ajouter une dérivée totale $dF(q, t)/dt$ fournit déjà une liberté, puisqu'elle ne change pas la variation à bouts fixés. Comprendre jusqu'où cette liberté s'étend ouvre une question de structure plutôt qu'une simple recherche de formule.