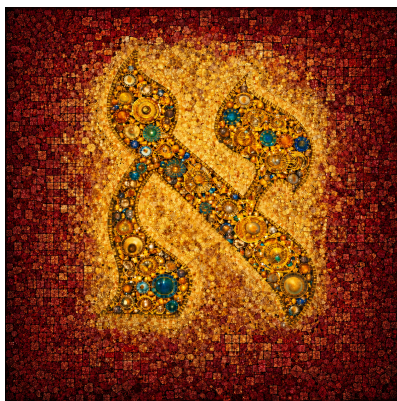




Cours articulé de mathématiques

III

Maîtrise

DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE À LA THÉORIE DE GALOIS

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Clem

MAÎTRISE

*Il n'y a pas de problèmes résolus, il n'y a que des problèmes plus ou moins
résolus.*

HENRI POINCARÉ

Cours articulé de mathématiques

III

Maîtrise

DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE À LA THÉORIE DE GALOIS

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Copyright © 2026 William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Collection COURS ARTICULÉ DE MATHÉMATIQUES

Tous droits réservés.

AVANT-PROPOS

Ce volume rassemble les domaines de la maîtrise en quatre cent cinquante-cinq articles, répartis en quatre-vingt-six chapitres. Il s'adresse à l'étudiant qui a traversé les seize parties de licence et qui entre dans la phase d'approfondissement : celle où les structures acquises précédemment atteignent la puissance nécessaire pour exprimer des motifs profonds.

La thèse de la collection Cours articulé de mathématiques est que les mathématiques sont la grammaire génératrice par laquelle la réalité se compose elle-même. Si la licence enseignait cette grammaire (groupes, espaces vectoriels, distances, mesure), la maîtrise est le moment où la syntaxe devient assez riche pour formuler des phrases complexes. Le théorème de Baire montre qu'un espace complet possède une solidité que nulle accumulation dénombrable ne peut entamer : la complétude est un levier qui transforme les arguments ponctuels en résultats uniformes. La topologie générale retient d'un espace métrique ce qui persiste une fois la distance oubliée, comme un sculpteur ne retient d'un bloc que la forme. La théorie de Galois révèle les symétries cachées des équations algébriques. Les distributions donnent un sens aux dérivées de fonctions qui n'en possèdent pas au sens classique. À ce niveau, les sept thèmes récurrents de la collection (dualité, symétrie, local-global, approximation, linéarisation, quotient, fonctorialité) ne sont plus des intuitions : ils sont des outils de démonstration.

L'architecture reste celle de toute la collection : l'article est l'unité fondamentale. Chaque article isole une idée et la développe en deux cent cinquante à huit cents mots. Le même geste du quotient qui crée $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en arithmétique crée la topologie quotient en géométrie et l'espace L^p en analyse. Le même principe d'approximation qui gouverne les suites de Cauchy gouverne les fonctions étagées en théorie de la mesure. Reconnaître ces échos d'un domaine à l'autre, c'est passer de la connaissance des pièces à la vision de l'édifice.

Lire est le premier geste. Mais comprendre les mathématiques exige de les pratiquer, et ce volume accompagne chaque chapitre d'un programme

d'exercices conçu pour que le lecteur ne soit jamais abandonné. Après chaque article, de courtes gammes font pratiquer immédiatement l'idée qui vient d'être exposée. En fin de chapitre, des études-méthodes enseignent les techniques fondamentales – calcul de spectre, formulation faible, méthode de Galerkin, théorème de Lax-Milgram, lemme de Céa, problème de Riemann, conditions d'entropie, calcul de courbure, équation de Jacobi –, chacune introduite par une leçon, puis mise en œuvre pas à pas. Un récapitulatif rassemble ces méthodes en une page. Enfin, des expéditions guidées mènent le lecteur, par étapes, vers des résultats et des questions de recherche : les équations d'Einstein, la conjecture de Riemann, le théorème de Furstenberg-Szemerédi, la géométrie non commutative de Connes, le problème du Milénaire de Navier-Stokes, le théorème de la sphère pincée, la géométrie de Calabi-Yau. Les comptes rendus distinguent les étapes résolues, les résultats admis et les questions ouvertes. Les corrigés sont imprimés à l'envers au pied de chaque exercice : le lecteur peut tenter l'exercice sans voir la réponse, puis la consulter en retournant le livre.

Chaque chapitre se termine par un encart Lectures complémentaires pointant la littérature originelle et les manuels de référence : Banach, Brezis, Rudin pour l'analyse fonctionnelle, Lang et Bourbaki pour l'algèbre, Hatcher et Lee pour la topologie et les variétés, Hartshorne et Shafarevich pour la géométrie algébrique. Une demi-page d'annotations brèves : ce ne sont pas des bibliographies exhaustives mais des panneaux indicateurs vers la suite naturelle de chaque sujet.

Les dix objets compagnons de la collection continuent leur parcours. Le cercle S^1 est désormais une variété différentielle et un groupe de Lie; $\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien dont les idéaux contenant $n\mathbb{Z}$ indexent les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps de nombres dont le groupe de Galois est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; le tore $\mathbb{T}^2$ est le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, terrain naturel de l'analyse de Fourier. Ces objets, aperçus dans les Éléments, formalisés en licence, sont ici des laboratoires où chaque théorie nouvelle se teste.

Le volume est organisé en vingt-cinq parties. L'analyse fonctionnelle, la mesure, les probabilités et la statistique préparent les équations différentielles, les systèmes dynamiques et l'analyse de Fourier. L'analyse complexe, l'algèbre et les géométries conduisent aux méthodes numériques, puis aux chapitres de travail et d'exercices. Les trois dernières parties ouvrent vers les structures algébriques avancées, la géométrie et la topologie, puis l'analyse, les probabilités et l'arithmétique avancées. Il suppose acquis le contenu de la

licence tel que couvert par le volume précédent. Il prépare le lecteur aux deux volumes de recherche : Correspondances, du corps de classes au programme de Langlands, et Physique mathématique, des symétries aux cordes.

Les notations sont les notations standard de l'analyse et de l'algèbre françaises. Elles sont cohérentes avec celles des ouvrages précédents et définies lors de leur première occurrence lorsqu'elles sont spécifiques à un domaine.

L'étudiant qui aborde ce volume ne cherche plus à apprendre les mathématiques : il cherche à les comprendre. La différence est considérable. Comprendre, c'est voir pourquoi un théorème est vrai, pas seulement qu'il l'est; c'est sentir la nécessité d'une définition, pas seulement la mémoriser; c'est percevoir, derrière la diversité des domaines, l'unité d'une grammaire. Ce volume est conçu pour accompagner ce passage.

AU LECTEUR

Ce cours articule en cinq volumes la grammaire par laquelle la réalité se compose elle-même : plus de mille trois cents articles de mathématiques, du premier nombre entier à la correspondance de Langlands et de la brachistochrone à l'amplituèdre. L'entreprise est vaste. L'auteur ne prétend pas qu'elle soit sans défauts; il affirme qu'elle est sincère.

Chaque article développe une seule idée, de sa motivation à son interprétation. Les définitions sont encadrées. Les résultats (propositions, théorèmes) sont signalés par leur étiquette en gras; dans les volumes 2 et 3, les théorèmes majeurs sont en outre encadrés en rouge. Les preuves sont présentes là où elles éclairent, esquissées là où la rigueur complète aurait obscurci le propos, et admises lorsque leur difficulté excède le cadre de l'article. Le lecteur saura distinguer les trois cas.

Dix objets mathématiques traversent la collection comme des fils rouges : le cercle S^1 , les entiers $\mathbb{Z}$, l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, la courbe elliptique $y^2 = x^3 - x$, le groupe GL_2 , la fonction $\zeta(s)$, l'espace L^2 , l'anneau $K[X]$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, et le tore T^2 . Du calcul trigonométrique au groupe dual de Langlands, de l'oscillateur harmonique à la dualité de Montonen-Olive, chacun de ces objets réapparaît à chaque cycle avec une profondeur nouvelle. Quand l'un se manifeste, le texte le signale.

Les figures, plus de huit cents au total, ont été dessinées avec le soin qu'exige un format de poche : chaque trait a une raison d'être, chaque label est dégagé de toute courbe, et la palette se limite à quatre couleurs. Elles ne remplacent pas la démonstration; elles la précèdent. Le lecteur qui regarde la figure avant de lire le théorème comprendra souvent l'énoncé avant d'en avoir lu un mot.

Dans les volumes I à III, les chapitres de cours se prolongent par des exercices gradués (gammes, études-méthodes, expéditions) dont les solutions détaillées sont imprimées à l'envers au pied de chaque exercice. Le lecteur qui s'y engage trouvera un pédagogue, jamais un examinateur.

Le lecteur peut suivre le chemin linéaire ou emprunter les passages transversaux entre volumes. Les volumes I à III forment une progression continue du lycée à la maîtrise. Le volume IV s'élève vers le programme de Langlands; le volume V, vers la physique mathématique. Tous deux supposent le volume III mais peuvent se lire indépendamment l'un de l'autre.

Toute erreur signalée est une erreur corrigée.

wdf@clementinium.com

NOTE SUR LES CYCLES

Les cinq volumes de la collection accompagnent une progression, des premiers objets mathématiques aux questions de recherche :

- *Éléments (I) : les mathématiques de l'enseignement secondaire, de l'arithmétique aux premières preuves.*
- *Licence (II) : les fondements des études universitaires de mathématiques.*
- *Maîtrise (III) : les approfondissements et la préparation à la recherche.*
- *Correspondances (IV) : le cycle de recherche, du corps de classes au programme de Langlands.*
- *Physique mathématique (V) : le cycle de recherche, des symétries aux cordes.*

Ces niveaux orientent la lecture sans imposer un calendrier universitaire. Les parties et les chapitres donnent les étapes du parcours; le rythme dépend des acquis du lecteur et des questions qu'il souhaite approfondir.

Les volumes I, II et III construisent successivement les prérequis qui permettent d'aborder le suivant. Le lecteur peut entrer directement au niveau dont il possède les acquis. Les volumes IV et V partagent le socle de la Maîtrise et peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. Les passerelles en début de volume précisent le changement de perspective.

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	<i>entiers naturels</i>
$\mathbb{Z}$	<i>entiers relatifs</i>
$\mathbb{Q}$	<i>nombres rationnels</i>
$\mathbb{R}$	<i>nombres réels</i>
$\mathbb{C}$	<i>nombres complexes</i>
$\in$	<i>appartient à</i>
$\subseteq$	<i>inclus dans</i>
$\cup, \cap, \emptyset$	<i>réunion, intersection, ensemble vide</i>
$\mathcal{P}(E)$	<i>ensemble des parties de E</i>
$A \setminus B$	<i>différence</i>
$\sqcup$	<i>réunion disjointe</i>
$\forall, \exists$	<i>pour tout, il existe</i>
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	<i>implique, équivaut à</i>
$ x $	<i>valeur absolue de x</i>
$\sqrt{x}$	<i>racine carrée de x</i>
$\leq, \geq$	<i>inférieur ou égal, supérieur ou égal</i>
π	<i>rapport de la circonférence au diamètre</i>
∞	<i>infini</i>
$\sin, \cos, \tan$	<i>fonctions trigonométriques</i>
$\ln, \exp$	<i>logarithme népérien, exponentielle</i>
$f'(x)$	<i>dérivée de f en x</i>
$\int_a^b f(x) \, dx$	<i>intégrale de f de a à b</i>
$\sum, \prod$	<i>somme, produit</i>
$n!, \binom{n}{k}$	<i>factorielle, coefficient binomial</i>
i	<i>unité imaginaire, $i^2 = -1$</i>
$\bar{z}, z , \arg(z)$	<i>conjugué, module, argument</i>
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	<i>partie réelle, partie imaginaire</i>
$\rightarrow$	<i>tend vers</i>
$x \mapsto f(x)$	<i>application qui à x associe $f(x)$</i>
$\vec{u}$	<i>vecteur u</i>
$f \circ g$	<i>composée de f et g</i>
$\ x\ $	<i>norme de x</i>

$\langle x, y \rangle$	<i>produit scalaire de x et y</i>
$\dim V$	<i>dimension d'un espace vectoriel V</i>
$\ker f, \operatorname{im} f$	<i>noyau, image d'une application linéaire</i>
$\det A$	<i>déterminant d'une matrice A</i>
A^T	<i>transposée de A</i>
$\operatorname{GL}_n, \operatorname{SL}_n, \operatorname{O}_n$	<i>groupes linéaire, spécial linéaire, orthogonal</i>
$a \equiv b \pmod{n}$	<i>congruence modulo n</i>
$\cong, \simeq$	<i>isomorphe à, équivalent à</i>
$\oplus, \otimes$	<i>somme directe, produit tensoriel</i>
$\lim$	<i>limite</i>
$\sup, \inf$	<i>borne supérieure, borne inférieure</i>
$\limsup, \liminf$	<i>limite supérieure, limite inférieure</i>
$O(\cdot), o(\cdot), \sim$	<i>notations de Landau, équivalence asymptotique</i>
$\frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial x}$	<i>dérivation ordinaire, dérivation partielle</i>
∇f	<i>gradient de f</i>
$\overline{A}$	<i>adhérence de A</i>
L^p	<i>espace de Lebesgue d'exposant p</i>
C^k, C^∞	<i>dérivées continues jusqu'à l'ordre k, fonctions lisses</i>
μ, λ	<i>mesure, mesure de Lebesgue</i>
$P(A)$	<i>probabilité de l'événement A</i>
$\mathbb{E}[X], \operatorname{Var}(X)$	<i>espérance, variance d'une variable aléatoire</i>
$\mathbf{1}_A$	<i>fonction indicatrice de A</i>
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	<i>loi normale de moyenne m, de variance σ^2</i>
$\mathcal{L}(E, F)$	<i>applications linéaires continues de E dans F</i>
E^*, E^{**}	<i>dual topologique, bidual de E</i>
$\sigma(T), \rho(T)$	<i>spectre, ensemble résolvant d'un opérateur T</i>
$W^{k,p}(\Omega), H^p(\Omega)$	<i>espaces de Sobolev</i>
$\mathcal{D}'(\Omega)$	<i>distributions sur Ω</i>
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	<i>espace de Schwartz, distributions tempérées</i>
$\operatorname{Spec} A$	<i>spectre d'un anneau A</i>
$\operatorname{Hom}, \operatorname{Ext}, \operatorname{Tor}$	<i>foncteurs d'algèbre homologique</i>
$\wedge$	<i>produit extérieur</i>
H^n	<i>cohomologie de degré n</i>
π_1	<i>groupe fondamental</i>
$\operatorname{Gal}(L/K)$	<i>groupe de Galois de l'extension L/K</i>
$[L : K]$	<i>degré de l'extension L/K</i>

Les conventions de produit hermitien sont indiquées localement : linéaire à gauche au chapitre 4, antilinéaire à gauche aux chapitres 45 et 47. Pour comparer les formules, on échange les arguments : $\Phi(x, y) = \langle y, x \rangle$.

Table des matières

Avant-propos	v
Au lecteur	viii
Note sur les cycles	x
Notations	xi
De la Licence à la Maîtrise	i
 I Analyse fonctionnelle	 2
1 Espaces métriques	3
Méthodes	22
Expéditions	29
2 Topologie générale	39
Méthodes	55
Expéditions	69
3 Espaces normés	77
Méthodes	96
Expéditions	104

4	Espaces de Hilbert	112
Méthodes		132
Expéditions		141
5	Topologie des espaces de fonctions	149
Méthodes		165
Expéditions		173
6	Convergence et approximation	178
Méthodes		197
Expéditions		204
7	Théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle	211
Méthodes		228
Expéditions		236
8	Topologies faibles et réflexivité	242
Méthodes		263
Expéditions		270
9	Théorie spectrale	276
Méthodes		314
Expéditions		325
II	Calcul différentiel	332
10	Calcul différentiel en dimension finie et infinie	333
Méthodes		366
Expéditions		377

III	Convexité et optimisation	389
II	Convexité	390
Méthodes		409
Expéditions		415
12	Optimisation	420
Méthodes		451
Expéditions		457
IV	Points fixes et applications	463
13	Points fixes et applications	464
Méthodes		482
Expéditions		489
V	Mesure et intégration	496
14	Tribu, mesure, mesurabilité	497
Méthodes		511
Expéditions		517
15	Construire l'intégrale de Lebesgue	525
Méthodes		538
Expéditions		545
16	Théorèmes de convergence	554
Méthodes		571
Expéditions		577
17	Espaces L^p	587
Méthodes		606
Expéditions		613

18	Construction et décomposition des mesures	621
Méthodes		638
Expéditions		642
19	Intégration avancée	648
Méthodes		664
Expéditions		670
VI	Probabilités et processus	676
20	Probabilités	677
Méthodes		721
Expéditions		730
21	Processus discrets	735
Méthodes		752
Expéditions		758
22	Processus continus	763
Méthodes		777
Expéditions		781
VII	Statistique mathématique	785
23	Modèles statistiques et estimation	786
Méthodes		820
Expéditions		826
24	Tests et régression	830
Méthodes		863
Expéditions		870

VIII	Équations différentielles	875
25	Équations différentielles ordinaires	876
Méthodes		901
Expéditions		906
26	EDP classiques	912
Méthodes		928
Expéditions		933
27	Méthodes pour les EDP	939
Méthodes		953
Expéditions		959
28	Compléments d'équations différentielles	965
Méthodes		979
Expéditions		985
IX	Systèmes dynamiques	990
29	Systèmes dynamiques continus	991
Méthodes		1005
Expéditions		1011
30	Systèmes dynamiques discrets	1017
Méthodes		1031
Expéditions		1036
31	Stabilité et bifurcations	1042
Méthodes		1056
Expéditions		1061

X	Distributions et Fourier	1068
32	Séries de Fourier	1069
Méthodes		1091
Expéditions		1100
33	Distributions	1107
Méthodes		1122
Expéditions		1128
34	Transformée de Fourier et distributions tempérées	1134
Méthodes		1155
Expéditions		1162
35	Espaces de Sobolev	1168
Méthodes		1184
Expéditions		1188
36	Applications de l'analyse de Fourier	1194
Méthodes		1207
Expéditions		1214
XI	Analyse complexe avancée	1219
37	Fonctions holomorphes	1220
Méthodes		1244
Expéditions		1253
38	Intégrale complexe	1260
Méthodes		1286
Expéditions		1296
39	Théorie globale des fonctions holomorphes	1304

Méthodes	1320
Expéditions	1325
40 Applications conformes	1332
Méthodes	1347
Expéditions	1352
41 Fonctions spéciales et surfaces de Riemann	1357
Méthodes	1372
Expéditions	1377
XII Algèbre linéaire avancée	1384
42 Dualité et multilinéarité	1385
Méthodes	1398
Expéditions	1403
43 Modules sur un anneau	1408
Méthodes	1422
Expéditions	1426
44 Décompositions structurelles	1430
Méthodes	1448
Expéditions	1453
45 Formes et algèbre bilinéaire	1456
Méthodes	1472
Expéditions	1477
XIII Géométrie bilinéaire	1480
46 Formes bilinéaires et quadratiques	1481
Méthodes	1495

Expéditions	1499
47 Espaces euclidiens et hermitiens	1504
Méthodes	1523
Expéditions	1527
48 Géométrie des formes	1530
Méthodes	1549
Expéditions	1554
XIV Algèbre générale	1558
49 Théorie des groupes	1559
Méthodes	1581
Expéditions	1585
50 Anneaux et idéaux	1588
Méthodes	1607
Expéditions	1612
51 Corps, extensions et séparabilité	1616
Méthodes	1640
Expéditions	1645
XV Théorie de Galois	1648
52 Théorie de Galois	1649
Méthodes	1668
Expéditions	1678
XVI Structures et algèbre commutative	1689
53 Produits, représentations, catégories	1690

Méthodes	1706
Expéditions	1716
54 Algèbre commutative	1724
Méthodes	1745
Expéditions	1758
55 Vers la géométrie algébrique	1766
Méthodes	1780
Expéditions	1793
XVII Topologie et géométrie diff.	1801
56 Revêtements et groupe fondamental	1802
Méthodes	1822
Expéditions	1834
57 Variétés différentiables	1841
Méthodes	1861
Expéditions	1874
58 Champs, formes et intégration	1881
Méthodes	1909
Expéditions	1920
XVIII Géométrie algébrique	1928
59 Variétés affines	1929
Méthodes	1949
Expéditions	1962
60 Variétés projectives	1969
Méthodes	1989

Expéditions	2002
61 Vers les schémas	2009
Méthodes	2023
Expéditions	2032
XIX Analyse numérique	2039
62 Approximation et interpolation	2040
Méthodes	2060
Expéditions	2071
63 Systèmes linéaires et valeurs propres	2079
Méthodes	2097
Expéditions	2110
64 Intégration et équations non linéaires	2118
Méthodes	2133
Expéditions	2146
65 Équations différentielles numériques	2156
Méthodes	2171
Expéditions	2183
XX Calcul scientifique	2191
66 Modélisation mathématique	2192
Méthodes	2204
Expéditions	2216
67 Simulation numérique	2223
Méthodes	2241
Expéditions	2253

68	Études de cas	2261
	Méthodes	2277
	Expéditions	2289
XXI	Lire et travailler	2298
69	Lire un cours de master	2299
70	Travailler un cours de master	2307
XXII	Exercices de transition	2314
71	Exercices d'analyse	2315
72	Exercices d'algèbre	2324
73	Exercices mixtes	2332
XXIII	Structures algébriques avancées	2340
74	Théorie des catégories	2341
	Méthodes	2363
	Expéditions	2367
75	Algèbre homologique	2372
	Méthodes	2398
	Expéditions	2402
76	Représentations des groupes finis	2407
	Méthodes	2429
	Expéditions	2433
77	Algèbres de Lie	2437

Méthodes	2454
Expéditions	2458

78 Groupes de Lie 2462

Méthodes	2480
Expéditions	2485

XXIV Géométrie différentielle et topologie 2488

79 Homologie singulière 2489

Méthodes	2510
Expéditions	2515

80 Courbes et surfaces dans l'espace 2519

Méthodes	2537
Expéditions	2542

81 Géométrie riemannienne 2546

Méthodes	2569
Expéditions	2576

XXV Analyse, probabilités et arithmétique avancées 2581

82 Calcul d'Itô 2582

Méthodes	2603
Expéditions	2609

83 Algèbres de Banach et théorie spectrale avancée 2613

Méthodes	2631
Expéditions	2636

84	Théorie ergodique	2640
Méthodes		2658
Expéditions		2662
85	EDP non linéaires	2665
Méthodes		2681
Expéditions		2686
86	Théorie des nombres élémentaire avancée	2693
Méthodes		2709
Expéditions		2712
Au terme de ce volume		2716
Bibliographie		2717
Index des notions		2721

DE LA LICENCE À LA MAÎTRISE

En licence, le chemin était balisé : définition, théorème, preuve, exercice. En maîtrise, il faut souvent trouver le chemin soi-même. C'est le changement le plus important, et il ne concerne pas les théorèmes : il concerne le regard.

Les premiers outils sont en place : espaces vectoriels, groupes, polynômes, calcul différentiel et intégral, séries et premières notions topologiques. La maîtrise les prolonge dans des territoires où la dimension finie ne suffit plus, où la topologie devient un choix, où les symétries se cachent dans des structures algébriques de plus en plus raffinées. L'intégrale de Lebesgue, les séries de Fourier et les fonctions holomorphes seront construites dans ce volume : elles élargiront les passages à la limite et les représentations des fonctions.

L'analyse fonctionnelle fera travailler les opérateurs sur des espaces de dimension infinie. Les distributions donneront un sens aux dérivées des fonctions qui n'en ont pas. La théorie de Galois révélera les symétries invisibles des équations polynomiales. Et les variétés remplaceront les ouverts de $\mathbb{R}^n$ par des espaces courbes qu'on ne peut observer que localement.

Lire un article, comprendre un séminaire, identifier la bonne question : ces compétences, plus difficiles à enseigner que les théorèmes, sont celles qui font le mathématicien. C'est à leur acquisition que ce volume est consacré.

Première partie

Analyse fonctionnelle

Deux chapitres de topologie ouvrent le volume : les espaces métriques, où se définissent complétude et compacité, puis les espaces topologiques, définis par leurs seuls ouverts. L'analyse fonctionnelle étudie ensuite les espaces vectoriels de dimension infinie munis d'une norme et les applications linéaires continues qui les relient. On construit les espaces de Banach et de Hilbert, puis on établit les quatre théorèmes fondamentaux : Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, application ouverte, graphe fermé. Les topologies faibles et la théorie spectrale des opérateurs bornés complètent l'édifice. La complétude est le levier constant : elle transforme des estimations ponctuelles en résultats uniformes.

CHAPITRE I

ESPACES MÉTRIQUES

Les suites, les limites et la continuité ont été définies sur $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue; sur $\mathbb{R}^n$, sur les espaces de fonctions, sur les suites, la même construction demande seulement une distance, et c'est tout ce qu'un espace métrique retient. Ce chapitre installe ce cadre et les quatre notions qui en découlent. Les ouverts, fermés et voisinages traduisent la distance en langage topologique. La complétude, où toute suite de Cauchy converge, permet de construire des limites sans les connaître, d'où le point fixe de Banach et le théorème de Baire. La compacité, où toute suite a une valeur d'adhérence, garantit les extrema. La connexité dit ce qu'est un espace d'un seul tenant, et fonde le théorème des valeurs intermédiaires.

Articles de ce chapitre :

1. *Distance et espace métrique — Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance, c'est-à-dire d'une fonction d positive, nulle exactement sur la diagonale, symétrique et vérifiant l'inégalité triangulaire.*
2. *Ouverts, fermés, voisinages — Dans un espace métrique, les notions d'ouvert, de fermé et de voisinage se définissent à partir de la distance.*
3. *Complétude — Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy y converge; la complétude garantit l'existence des limites.*
4. *Compacité — La compacité est la propriété topologique qui permet d'extraire de toute suite une sous-suite convergente; dans $\mathbb{R}^n$, elle équivaut au caractère fermé borné (théorème de Heine-Borel).*
5. *Connexité — Un espace est connexe s'il ne peut être scindé en deux ouverts.*

I. DISTANCE ET ESPACE MÉTRIQUE.

DEUX fonctions continues sur $[0, 1]$ peuvent être proches en un sens et éloignées dans un autre : proches si l'aire entre leurs graphes est petite, éloignées si leurs valeurs diffèrent fortement en certains points, comme le montre un pic continu très étroit et très haut, d'aire faible mais d'écart maximal grand. Derrière cette ambiguïté se cache une question fondamentale : que signifie « être proche » dans un ensemble qui n'est pas $\mathbb{R}^n$? La topologie de $\mathbb{R}^n$ apprise au volume précédent, bâtie sur la distance euclidienne, n'avait rien de spécifique à $\mathbb{R}^n$. Dès que l'on isole les propriétés de la distance qui fondent la théorie (séparation, symétrie, inégalité triangulaire), le même édifice se construit sur n'importe quel ensemble. Le cadre qui en résulte, l'espace métrique, est comme un plan d'architecte : il dessine la topologie sans fixer les matériaux.

DÉFINITION 1.1 : Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in X$:

1. *Séparation* : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

DÉFINITION 1.2 : Un *espace métrique* est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d une distance sur X .

Ces trois axiomes suffisent à engendrer toute une topologie. Avant de le voir, examinons la diversité des situations qu'ils recouvrent.

EXEMPLE : (1) $(\mathbb{R}^n, d_2)$, où $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$, est l'espace euclidien. (2) $(C([a, b]), d_\infty)$, où $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$, mesure l'écart uniforme entre fonctions continues. (3) Le cercle S^1 et le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, munis de la distance induite par $\mathbb{R}^n$, sont des espaces métriques compacts que l'on retrouvera comme domaines de

l'analyse de Fourier. (4) La distance discrète, définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$, fait de tout ensemble un espace métrique. (5) Sur $\mathbb{R}^n$, les distances $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ et $d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|$ sont également des distances.

DÉFINITION 1.3 : Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. La *boule ouverte* de centre x et de rayon r est $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. La *boule fermée* est $\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.

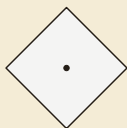
Les boules ouvertes jouent le rôle des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$: elles servent de briques élémentaires pour bâtir la topologie. Un sous-ensemble U est déclaré ouvert si chacun de ses points est centre d'une boule ouverte contenue dans U .

PROPOSITION 1.4 : Les boules ouvertes engendrent une topologie sur (X, d) : un ensemble $U \subset X$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Ce résultat est admis.

Deux distances sur un même ensemble peuvent engendrer la même topologie (les mêmes ouverts, les mêmes convergences) tout en mesurant les écarts différemment.

DÉFINITION 1.5 : Deux distances d et d' sur X sont *topologiquement équivalentes* si elles définissent la même topologie (les mêmes ouverts). Une condition suffisante, dite *équivalence bilipschitzienne* et strictement plus forte, est l'existence de constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$.

 d_1  d_2  d_∞

Boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour d_1, d_2, d_∞

REMARQUE 1.6 : Sur $\mathbb{R}^n$, toutes les distances issues des normes $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) sont équivalentes : les boules changent de forme (carré, disque, carré tourné) mais les ouverts restent les mêmes. Ce phénomène est propre à la dimension finie. Dans $C([a, b])$, la distance d_∞ et la distance $d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ (pour $a < b$) ne sont pas équivalentes : la convergence uniforme est strictement plus forte que la convergence en moyenne. La géométrie de l'espace dépend alors véritablement du choix de la distance.

Ainsi, la notion d'espace métrique isole le minimum structurel nécessaire pour parler de proximité, de convergence et de continuité. Ce cadre unifie des situations en apparence hétérogènes (points de $\mathbb{R}^n$, fonctions continues, suites bornées) et ouvre la voie aux constructions topologiques qui structureront tout le présent volume.

Le premier exercice vérifie qu'une fonction est une distance. Le second compare les boules pour différentes distances sur $\mathbb{R}^2$.

- Vérifier que $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ est une distance sur $\mathbb{R}$, et étudier son équivalence avec la distance usuelle $|x - y|$.

Solution : Vérification des axiomes. (i) Positivité et séparation. $d(x, y) = |x^3 - y^3| \geq 0$, avec égalité ssi $x^3 = y^3$ (puisque $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective). OK (ii) Symétrie. $|x^3 - y^3| = |y^3 - x^3|$, OK. (iii) Inégalité triangulaire. $|x^3 - z^3| \leq (|x^3 - y^3| + |y^3 - z^3|)$ par inégalité triangulaire pour la valeur absolue. OK. Donc d est une distance. Équivalence avec $|x - y|$. Identité avec $|x - y|$. $|x^3 - y^3| = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, donc $d(x, y) = |x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2|$. Sur un compact $[-A, A]$, $|x^2 + xy + y^2| \leq 3A^2$, et en outre $|x^2 + xy + y^2| \geq 0$. Mais minimum? En $x = y = 0$: $|x^2 + xy + y^2| = 0$. Donc pour x, y au voisinage de 0, $d(x, y)$ peut être beaucoup plus petit que $|x - y|$. Sur $\mathbb{R}$ entier. Aucune équivalence Lipschitz : pour x, y près de 0, ratio $d/|x - y| \rightarrow 0$ pour x, y grands, ratio $\rightarrow \infty$. Topologiquement équivalentes? Oui, car $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (continu, bijectif, inverse continu). Mais pas Lipschitz-équivalences globalement. Léon. Deux distances peuvent être topologiquement équivalentes (mêmes ouverts). Même ouverts. Mais pas Lipschitz-équivalences globalement. La distinction compte pour la complétude et l'uniforme continu.

- Dessiner la boule unité $B(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances d_1 ($\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$), d_2 (euclidienne) et d_∞ ($\|x\|_\infty = \max |x_i|$).

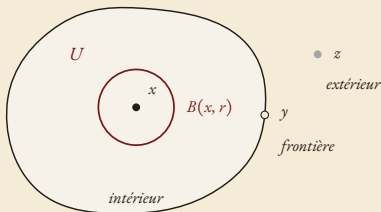
Solution : Boule pour d_2 (euclidienne). $B_2(0, 1) = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Boule pour d_1 (Manhattan). $B_1(0, 1) = \{x_1, x_2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$. Boule pour d_∞ (sup). $B_\infty(0, 1) = \{x_1, x_2 : \max(|x_1|, |x_2|) \leq 1\}$. Forme : carré ouvert de côté 2, sommets $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$. Forme : losange (carré tourné de 45°) de côté ouvert de côté 2, sommets $(\pm 1, \pm 1)$. Inclusions. $B_1(0, 1) \subset B_2(0, 1) \subset B_\infty(0, 1)$, qui se traduit par les inégalités entre normes : $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$. Démonstration des inégalités. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ (chacun des $|x_i|$ est $\leq$ somme). $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \cdot \sqrt{2}$ (élever au carré; cela découle de $|x_1| + |x_2| \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$). Toutes les distances d_p sur $\mathbb{R}^2$ (et plus généralement $\mathbb{R}^n$) sont équivalentes : elles définissent la même topologie. Phénomène propre à la dimension finie. Constantes d'équivalence. Pour $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$, distances ont des formes très différentes (disque rond, losange, carré), mais en dim finie, elles définissent la même topologie. Cette équivalence disparaît en dim infinie (espaces L^p , par ex.).

2. OUVERTS, FERMÉS, VOISINAGES.

U_N espace métrique possède sa distance, mais on ne travaille presque jamais directement avec elle. Ce qui importe, c'est la géographie qu'elle dessine : quels ensembles laissent à chacun de leurs points une marge de manoeuvre, lesquels retiennent leurs limites, lesquels enveloppent un point sans être eux-mêmes ouverts. Les notions d'ouvert, de fermé et de voisinage (familières dans $\mathbb{R}^n$) se transposent mot pour mot aux espaces métriques, mais leur portée s'élargit considérablement : elles structurent aussi bien les espaces de fonctions que les espaces discrets.

DÉFINITION 2.1 : Soit (X, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $U \subset X$ est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

La figure suivante illustre ces trois situations : un point intérieur, autour duquel une boule entière tient dans l'ensemble; un point frontière, sur le bord; et un point extérieur.



Point intérieur (la boule $B(x, r)$ est contenue dans U), point frontière et point extérieur.

Les ouverts vérifient les propriétés fondamentales d'une topologie : $\emptyset$ et X sont ouverts; toute réunion d'ouverts est ouverte; toute intersection finie d'ouverts est ouverte. La restriction à l'intersection finie n'est pas un artifice : dans $\mathbb{R}$, $\bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert. L'infini, même dénombrable, peut refermer ce que le fini laissait ouvert.

DÉFINITION 2.2 : Un sous-ensemble $F \subset X$ est *fermé* si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

La définition par complémentaire est élégante mais peu maniable. En pratique, on préfère la caractérisation séquentielle : F est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de F qui converge dans X a sa limite dans F . Un fermé est un ensemble qui ne laisse pas ses limites lui échapper.

DÉFINITION 2.3 : Un ensemble V est un *voisinage* d'un point x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$.

DÉFINITION 2.4 : Soit $A \subset X$. L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A . L'adhérence $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A . La frontière est $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

PROPOSITION 2.5 : Un point x appartient à $\bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \rightarrow x$.

Cette caractérisation séquentielle de l'adhérence est l'un des outils les plus utilisés dans les espaces métriques. Elle transforme une question ensembliste, x est-il dans le plus petit fermé contenant A ?, en un procédé constructif : trouver une suite d'éléments de A qui s'approche de x .

EXEMPLE : Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intérieur de $\mathbb{Q}$ est vide ($\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$), car tout intervalle ouvert contient des irrationnels. L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ tout entier, par densité des rationnels. La frontière est donc $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$: les rationnels sont partout et nulle part à la fois. Dans $(C([0, 1]), d_\infty)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 est l'ensemble des fonctions continues f vérifiant $\sup_{[0,1]} |f| < 1$.

DÉFINITION 2.6 : Une partie A est *dense* dans X si $\bar{A} = X$, c'est-à-dire si tout point de X est limite d'une suite d'éléments de A .

REMARQUE 2.7 : La caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence est propre aux espaces métriques (et, plus généralement, aux espaces à base dénombrable de voisinages). Dans un espace topologique général, les suites ne suffisent plus et l'on doit recourir aux filtres ou aux filets. C'est l'un des privilèges des espaces métriques : les suites y sont un langage complet pour décrire la topologie.

On retiendra que la topologie d'un espace métrique (ouverts, fermés, intérieur, adhérence, frontière) se construit entièrement à partir des boules ouvertes, et que la caractérisation séquentielle rend ces notions accessibles au calcul concret. Cette architecture, héritée de $\mathbb{R}^n$ mais valable bien au-delà, fournit le vocabulaire dans lequel s'exprimeront complétude, compacité et continuité.

Le premier exercice utilise la caractérisation séquentielle des fermés. Le second calcule adhérence et intérieur d'un ensemble.

- Démontrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle.

Solution : Caractérisation séquentielle. F est fermé ssi pour toute suite (x_n, y_n) d'éléments de F qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) \in F$. Application. Soit $(x_n, y_n) \in F$ avec $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Hypothèse : $x_n^2 + y_n^2 \leq 1$ pour tout n . Continuité de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est continue (polynôme). Donc $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y)$. Passage à la limite dans l'inégalité : $x_n^2 + y_n^2 \leq 1 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ (par passage à la limite dans une inégalité large, vraie pour des suites convergentes). Donc $x^2 + y^2 \leq 1$, soit $(x, y) \in F$. F est fermé. Démonstration alternative par image réciproque. $F = f^{-1}([0, 1])$ avec $f(x, y) = x^2 + y^2$. f est continue, $[0, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}([0, 1])$ (fermé) est fermé (caractérisation séquentielle ; (2) image réciproque d'un fermé par fonction continue. La seconde est souvent plus rapide pour les ensembles définis par inégalités).

- Calculer adhérence, intérieur et frontière de $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Solution : Adhérence. $\bar{A} = \mathbb{R}$. Mais tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite de rationnels. Les rationnels sont denses dans $[0, 1]$: pour tout $x \in [0, 1]$, il existe une suite $(q_n) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ telle que $q_n \rightarrow x$. Donc $\bar{A} = [0, 1]$. Intérieur. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A . Pour qu'un point $x \in A$ soit intérieur, il faut un intervalle ouvert $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ entièrement inclus dans A . Mais tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des irrationnels (densité des irrationnels). Donc aucun intervalle ouvert n'est inclus dans A . Conclusion. $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Frontière. $\partial A = A \setminus \overset{\circ}{A} = A$. Tous les points de $[0, 1]$ sont des points frontières de A . Interprétation. A est « partout et nulle part » : il est dense dans $[0, 1]$ (adhérence pleine) mais il a un intérieur vide (aucun intervalle entier dedans). Caractéristique des ensembles ni ouverts ni fermés. A est néanmoins un Borelien (intersection d'un fermé $[0, 1]$ et d'un Borelien $\mathbb{Q}$, qui est dénombrable, donc F_σ). Mesure de Lebesgue. $\lambda(A) = 0$ (puisque $A \subseteq \mathbb{Q}$ dénombrable). Mais $\lambda(\bar{A}) = \lambda([0, 1]) = 1$. Distinction adhérence/mesure. Legon. Adhérence et intérieur mesurent deux aspects différents : un ensemble peut avoir une adhérence « grande » et un intérieur vide. Mais $\bar{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$: ces opérations ne sont pas indépendantes.

3. COMPLÉTUDE.

CERTAINS espaces ont des trous. Dans $\mathbb{Q}$, la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ est de Cauchy, ses termes se rapprochent indéfiniment les uns des autres, mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. La suite « devrait converger » mais l'espace n'est pas assez riche

pour accueillir sa limite. La complétude est précisément l'absence de tels trous : un espace complet contient toutes les limites que ses suites de Cauchy promettent. Cette propriété, qui sous-tend toute l'analyse réelle depuis la construction de $\mathbb{R}$, se transpose aux espaces métriques avec des conséquences spectaculaires.

DÉFINITION 3.1 : Une suite (x_n) dans un espace métrique (X, d) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq N$ implique $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Toute suite convergente est de Cauchy. Les termes qui s'approchent d'une limite s'approchent a fortiori les uns des autres. La réciproque est la question décisive.

DÉFINITION 3.2 : Un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X converge dans X .

En d'autres termes, un espace est complet si les suites qui « devraient converger » convergent effectivement : le critère de Cauchy, vérifiable sans connaître la limite, suffit à garantir l'existence de celle-ci.

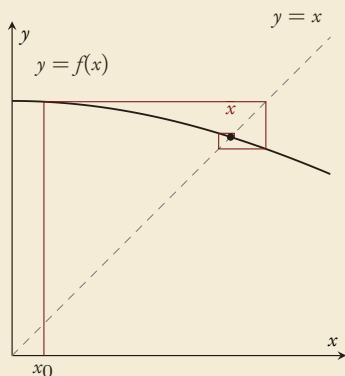
EXEMPLE : $(\mathbb{R}^n, d_2)$ est complet. L'espace $(C([a, b]), d_\infty)$ est complet : c'est le théorème de la limite uniforme, qui affirme que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. En revanche, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

PROPOSITION 3.3 : Un sous-espace d'un espace métrique complet est complet si et seulement s'il est fermé.

Ce résultat éclaire le lien entre fermeture topologique et complétude : être fermé dans un espace complet, c'est hériter de sa complétude. Pour vérifier qu'un sous-ensemble est complet, il suffit de montrer qu'il est fermé dans un espace complet ambiant.

THÉORÈME 3.4 : (Point fixe de Banach.) Soit (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire vérifiant $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$, avec $0 \leq k < 1$. Alors f admet un unique point fixe $\bar{x} \in X$, obtenu comme limite de toute suite itérée $x_{n+1} = f(x_n)$.

PREUVE : Soit $x_0 \in X$ quelconque et $x_{n+1} = f(x_n)$. On vérifie que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$, d'où, par l'inégalité triangulaire, (x_n) est de Cauchy. Par complétude, elle converge vers un $\bar{x}$. La continuité de f (conséquence de la contraction) donne $f(\bar{x}) = \bar{x}$. L'unicité résulte de la séparation : si $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et $f(\bar{y}) = \bar{y}$, alors $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq k d(\bar{x}, \bar{y})$, ce qui impose $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.



Convergence de la suite itérée vers le point fixe

Le théorème du point fixe est un levier remarquable : il transforme un problème d'existence (trouver une solution) en un problème de vérification, montrer qu'un opérateur est contractant. La complétude fournit la convergence, la contraction fournit l'unicité.

EXEMPLE : Le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit l'existence et l'unicité locale des solutions d'équations différentielles ordinaires,

se démontre par application du point fixe de Banach dans un espace de fonctions continues muni de la norme uniforme, ou d'une norme équivalente à poids.

DÉFINITION 3.5 : Le complété d'un espace métrique (X, d) est un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ dans lequel X se plonge isométriquement et dont l'image est dense. Le complété existe et est unique à isométrie près.

REMARQUE 3.6 : La construction du complété généralise celle de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ par classes d'équivalence de suites de Cauchy. Les espaces L^p , pour $1 \leq p < \infty$, du chapitre 17 naissent de la même manière : ce sont les complétés d'espaces de fonctions étagées intégrables pour les normes L^p . Comblé les trous d'un espace, c'est en révéler la structure profonde.

La complétude est, en définitive, la garantie que les suites de Cauchy convergent : c'est la contraction qui rend cauchyennes les itérées de Picard, et la complétude qui leur fournit alors une limite. Du point fixe de Banach aux espaces L^p , chaque fois qu'une suite de Cauchy se présentera dans la suite du cours, c'est la complétude de l'espace ambiant qui permettra de conclure.

Le premier exercice exhibe une suite de Cauchy non convergente dans $\mathbb{Q}$. Le second applique le point fixe de Banach.

- Construire une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Solution : *Synthèse*. Trouver une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel (par ex. $\sqrt{2}$). Cette suite est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathbb{Q}$, mais sa limite n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Construction. Suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$: $x_0 = 1, x_1 = 1,4, x_2 = 1,41, x_3 = 1,414, x_4 = 1,4142, \dots$. Chaque x_n a un nombre fini de décimales, donc $x_n \in \mathbb{Q}$. Convergence dans $\mathbb{R}$. $x_n \rightarrow \sqrt{2}$ (approximation décimale). Donc (x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Caractère de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Pour $m, n \geq N : |x_m - x_n| \leq 10^{-N}$ (différence sur les décimales au-delà de la N -ième). Donc Cauchy dans $\mathbb{Q}$ aussi. Non-convergence dans $\mathbb{Q}$. Si (x_n) convergait vers $q \in \mathbb{Q}$, alors par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ (qui contient $\mathbb{Q}$), $q = \sqrt{2}$. Mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Conclusion. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet. Construction par dichotomie (alternative). $a_0 = 1, b_0 = 2$. À chaque étape, $c_n = a_n + b_n$ / 2. Si $c_n^2 > 2$: $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$. Sinon $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$. Convergence vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Construction par récurrence d'Héron-Newton. $u_0 = 1, u_{n+1} = (u_n + 2/u_n) / 2$. Suite rationnelle, converge vers $\sqrt{2}$. Cohérent. L'unicité de $\mathbb{Q}$ est la raison pour laquelle on construit $\mathbb{R} : \mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle. Cette construction généralise à tout espace métrique.

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = x/2 + 1/4$. Vérifier que f est contractante, calculer son point fixe par itération, et estimer la vitesse de convergence.

Solution : *Vérification de la contraction*. $|f(x) - f(y)| = |(x/2 + 1/4) - (y/2 + 1/4)| = |x - y|/2$. Donc f est 1/2-Lipschitz, et $1/2 < 1$. f est contractante de rapport $k = 1/2$. Image dans $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x/2 + 1/4 \in [1/4, 3/4] \subseteq [0, 1]$. Calcul du point fixe. $f(\bar{x}) = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}/2 + 1/4 = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 1/4$. Donc $\bar{x} = 1/4$. Itération à partir de $x_0 = 0$. $x_1 = f(0) = 1/4, x_2 = f(1/4) = 1/8 + 1/4 = 3/8, x_3 = f(3/8) = 3/16 + 1/4 = 7/16, x_4 = f(7/16) = 7/32 + 1/4 = 15/32$. Tendanc. $0, 1/4, 3/8, 7/16, 15/32, \dots$. Forme. $x_n = (2^n - 1)/2^{n+1} = 1/2 - 1/2^{n+1}$. $x_0 = 0 = 1/2 - 1/2$. $x_1 = 1/4 = 1/2 - 1/2^2$. $x_n \rightarrow 1/2$ par $\rightarrow 1/2$. Vitesse de convergence. $|x_n - \bar{x}| = 1/2^{n+1}$. Décroissance géométrique de raison $1/2$. Cohérent avec la majoration de Banach exacte (cas linéaire). *Logon*. Le théorème du point fixe de Banach donne : (i) existence et unicité du point fixe ; (z) convergence géométrique de l'itération vers le point fixe ; (3) majoration explicite de l'erreur en fonction du nombre d'itérations.

4. COMPACTITÉ.

POURQUOI les fonctions continues sur un segment atteignent-elles toujours leurs bornes, alors que ce n'est pas le cas sur un intervalle ouvert ? La réponse tient en un mot : compacité. Dans $\mathbb{R}^n$, le théorème de Heine-Borel identifie les compacts aux fermés bornés, mais cette caractérisation commode est un accident de la dimension finie. Dès que l'on passe aux espaces de fonctions, « fermé et borné » ne suffit plus, et la compacité exige une définition intrinsèque.

DÉFINITION 4.1 : Un espace métrique (X, d) est *séquentiellement compact* si de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite convergente dans X .

DÉFINITION 4.2 : Un espace métrique (X, d) est *compact* (au sens des recouvrements) si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

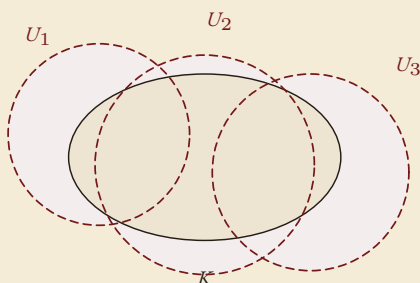
Ces deux définitions semblent parler de choses différentes (l'une de suites, l'autre de recouvrements) mais dans les espaces métriques, elles disent exactement la même chose.

THÉORÈME 4.3 : Dans un espace métrique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) est compact (recouvrements).
2. (X, d) est séquentiellement compact.
3. (X, d) est complet et totalement borné.

Ce résultat est admis.

Un espace est totalement borné si, pour tout $\varepsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε . La troisième caractérisation décompose la compacité en deux ingrédients : la complétude empêche les limites de fuir, et la bornitude totale empêche les suites de s'éparpiller.



Un compact couvert par trois ouverts : l'état final d'une extraction finie

La figure montre l'état final : trois ouverts suffisent à couvrir le compact. La compacité affirme que, de tout recouvrement ouvert (potentiellement infini), on peut toujours extraire une telle sous-famille finie : c'est précisément le contenu de la définition par recouvrements.

EXEMPLE : Le segment $[0, 1]$ est compact dans $\mathbb{R}$. Tout espace métrique fini est compact. En revanche, la boule unité fermée de $(C([0, 1]), d_\infty)$ n'est pas compacte : la suite $f_n(x) = x^n$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente (la limite ponctuelle n'est pas continue).

PROPOSITION 4.4 :

1. Tout compact est fermé et borné.
2. Tout fermé d'un compact est compact.
3. L'image continue d'un compact est compacte.

Ce résultat est admis.

La propriété (iii) est un principe de transfert : la compacité, comme un bien transportable, passe de la source au but par l'image continue. Conséquence immédiate : toute fonction continue à valeurs réelles sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

PROPOSITION 4.5 : (Théorème de Heine.) Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) < \delta$ implique $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, le même δ servant en tout point.

Ce résultat est admis. L'idée du passage du local à l'uniforme exige des demi-rayons : on choisit $r_x > 0$ pour que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ dès que $d(x, y) < r_x$, puis on extrait un recouvrement fini par les $B(x, r_x/2)$. Le minimum des demi-rayons retenus garantit que deux points assez proches appartiennent à une même boule $B(x, r_x)$; l'inégalité triangulaire donne alors un écart d'images inférieur à ε .

THÉORÈME 4.6 : (Heine-Borel.) Dans $\mathbb{R}^n$, un sous-ensemble est compact si et seulement s'il est fermé et borné. La forme séquentielle correspondante (toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente) est appelée *Bolzano-Weierstrass*.

Ce résultat est admis.

Ce résultat repose sur la complétude de $\mathbb{R}^n$ et sur le fait qu'en dimension finie, borné implique totalement borné.

REMARQUE 4.7 : En dimension infinie, fermé et borné n'implique pas compact. La boule unité fermée d'un espace de Banach de dimension infinie (chapitre 3) n'est jamais compacte pour la topologie de la norme : c'est le signe que la dimension infinie offre assez d'espace pour que des suites s'échappent dans des directions toujours nouvelles, uniformément séparées des précédentes (lemme de Riesz), sans jamais se rattraper. Le théorème d'Ascoli-Arzelà, qui caractérise les parties *relativement* compactes de $C([a, b])$ par l'équicontinuité et la bornitude uniforme (une partie est compacte si, de plus, elle est fermée), restaure un critère opérationnel là où la simple bornitude échoue.

La compacité transforme l'infini en fini : elle garantit que les suites possèdent des sous-suites convergentes et que les recouvrements se

réduisent. Cette propriété de finitude sera un levier décisif, chaque fois qu'un argument exigera de passer du local au global.

Le premier exercice montre qu'un fermé borné de $C([0, 1])$ n'est pas nécessairement compact. Le second utilise l'image continue d'un compact.

- Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de d_∞ . Démontrer que la boule fermée $\bar{B}(0, 1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$ n'est pas compacte (donc fermé borné $\nRightarrow$ compact en dim infinie).

Solution : Stratégie. Exhiber une suite dans $B(0, 1)$ sans sous-suite convergente. Suite candidate $f_n(x) = x^n$. Appartenance à $B(0, 1)$. $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$, donc $f_n \in B(0, 1)$. Étude de la convergence ponctuelle $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$ pour $x < 1$, $f_n(1) = 1$. Donc $f_n \rightarrow f$ ponctuellement avec $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. f n'est pas continue (saut en $x = 1$). Donc $f \notin C([0, 1])$. Convergence uniforme. Si (f_n) avait une sous-suite (f_{n_k}) convergeant uniformément vers une fonction $g \in C([0, 1])$, alors par convergence ponctuelle $g = f$ partout sur $[0, 1]$, mais g étant continue, on devrait avoir $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_{n_k}(x) = 0 \neq 1$. Contradiction. Conclusion : aucune sous-suite de (f_n) ne converge uniformément. $B(0, 1)$ n'est pas séquentiellement compact, donc non compact. Or $B(0, 1)$ est fermé et borné. Conclusion fondamentale. En dimension infinie, fermé et borné $\nRightarrow$ compact. Théorème de Riesz. Plus fort : dans tout espace de Banach de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte pour la topologie de la norme. Critère de compacité dans $C([a, b])$ (Ascoli-Arzelà). Voir Expédition 2. Lem. Le théorème de Bolzano-Weierstrass (compact $\Leftrightarrow$ fermé borné) est un accident de la dimension finie. Hors de ce cadre, la compacité demande un critère plus fin (équicontinuité pour fonctions continues, par ex.).

- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact non vide et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Démontrer que f est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes).

Solution : Lemme $f(K)$ borné, et $\sup_K f$ et $\inf_K f$ sont atteints (i.e., il existe $a, b \in K$ avec $f(a) = \max$, $f(b) = \min$). Étape 1 : $f(K)$ est compact. L'image continue d'un compact est compact (résultat admis). Étape 2 : $f(K)$ est fermé et borné (caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}$ via Bolzano-Weierstrass). Donc f est bornée. Étape 3 : Maximum et minimum atteints. $f(K)$ étant fermé et borné, $\sup f(K) \in f(K)$ et $\inf f(K) \in f(K)$. Pourquoi. $\sup f(K)$ est limite d'une suite dans $f(K)$, et $f(K)$ étant fermé contient cette limite. Donc $\sup f(K) \in f(K)$, c'est un maximum atteint. Idem pour $\inf$. Conclusion. Il existe $a \in K$ avec $f(a) = \inf_K f$ (minimum atteint), et $b \in K$ avec $f(b) = \sup_K f$ (maximum atteint). Application classique. Sur $[a, b]$, toute fonction continue est bornée et atteint ses bornes (Weierstrass, 1860). Généralisation. Vrai sur tout compact métrique, pas seulement intervalles fermés. Application : sphère. La sphère S^{n-1} est compacte; toute fonction continue $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint ses extrema. Utile en analyse géométrique. Lem. La compacité transjette par continuité : image continue d'un compact est compact. Cette propriété est la base de tous les théorèmes d'extrema en analyse.

5. CONNEXITÉ.

PEUT-ON briser un espace en deux morceaux sans rien déchirer? Si une fonction continue sur $[a, b]$ prend une valeur négative en a et une valeur positive en b , elle doit s'annuler quelque part entre les deux : c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Ce résultat, si naturel qu'il semble aller de soi, repose sur une propriété profonde de l'intervalle : il est impossible de le scinder en deux ouverts

disjoints non vides. La connexité formalise cette impossibilité de la coupure nette.

DÉFINITION 5.1 : Un espace métrique (X, d) est *connexe* si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X . De façon équivalente, il n'existe pas de partition $X = U \sqcup V$ avec U et V ouverts non vides.

DÉFINITION 5.2 : Un espace métrique (X, d) est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

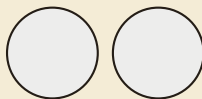
PROPOSITION 5.3 : Tout espace connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse en général, mais elle est vraie pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Le contre-exemple classique est la courbe sinus du topologue, adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$: elle est connexe, mais aucun chemin ne joint le graphe au segment limite $\{0\} \times [-1, 1]$.

Ce résultat est admis.

La connexité par arcs est la version constructive de la connexité : elle ne se contente pas d'affirmer que l'espace est d'un seul tenant, elle fournit un chemin reliant deux points quelconques. Pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$, les deux notions coïncident, ce qui est une commodité précieuse en pratique.



connexe



non connexe

Espace connexe et espace non connexe dans $\mathbb{R}^2$

La figure oppose les deux situations : un disque, d'un seul tenant, est connexe, tandis que la réunion de deux disques disjoints ne l'est pas, puisque chacun d'eux constitue un ouvert non vide séparant l'ensemble en deux morceaux.

EXEMPLE : $\mathbb{R}^n$ et toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs. L'espace $\mathbb{Q}$, muni de la distance usuelle, n'est pas connexe : pour tout irrationnel α , la partition $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : q < \alpha\} \sqcup \{q \in \mathbb{Q} : q > \alpha\}$ sépare $\mathbb{Q}$ en deux ouverts non vides. Le « peigne supprimé » (deleted comb), réunion dans $\mathbb{R}^2$ des segments $\{1/n\} \times [0, 1]$, de la base $[0, 1] \times \{0\}$ et du seul point $(0, 1)$, est connexe mais non connexe par arcs : aucun chemin continu ne relie $(0, 1)$ au reste, car sa première coordonnée serait continue, donc d'image connexe, or près de $(0, 1)$ elle devrait prendre ses valeurs dans l'ensemble totalement discontinu $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\}$ et rester ainsi constante égale à 0 au voisinage de tout instant où le chemin passe par $(0, 1)$: l'ensemble de ces instants est donc ouvert, et comme il est aussi fermé (continuité) et non vide, c'est tout l'intervalle : le chemin est constant.

DÉFINITION 5.4 : La composante connexe d'un point $x \in X$ est le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x . Les composantes connexes forment une partition de X en fermés.

THÉORÈME 5.5 : (Valeurs intermédiaires généralisé.) Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Ce résultat est admis.

Ce théorème révèle que le résultat classique sur $[a, b]$ n'avait rien de spécifique aux intervalles réels : c'est la connexité de la source qui force l'image à ne sauter aucune valeur. L'image continue d'un connexe est connexe, et les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

REMARQUE 5.6 : La connexité est un invariant topologique, préservé par homéomorphisme. Elle offre un outil négatif redoutablement efficace : pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, il suffit de trouver une opération qui brise la connexité de l'un mais pas de l'autre. Ainsi, $\mathbb{R}$ privé d'un point se scinde en deux morceaux, alors que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point reste connexe, preuve que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ vivent dans des mondes topologiques différents.

Avec la complétude, la compacité et la connexité, l'espace métrique dispose désormais de ses trois propriétés globales fondamentales. Elles forment le socle sur lequel reposent les théorèmes d'existence, d'unicité et de prolongement qui traverseront toute l'analyse.

Le premier exercice étudie la connexité de quelques sous-ensembles. Le second applique le théorème des valeurs intermédiaires généralisé.

• *Étudier la connexité des ensembles suivants dans $\mathbb{R}^2$: (a) le disque ouvert $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, (b) la couronne $C = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (plan privé de l'axe horizontal).*

Solution : (a) Disque. Connexe par arcs (et donc connexe). Démonstration. Pour $A, B \in D$, le segment $[A, B]$ paramétré par $\gamma(t) = (1-t)A + tB$ reste dans D (par convexité de D , conséquence de l'inégalité triangulaire). Connexité $\Rightarrow$ connexe par arcs. (b) Couronne. Connexe par arcs. Démonstration. Pour $A, B \in C$, suivre le rayon de A jusqu'au cercle moyen $x^2 + y^2 = 5/2$, parcourir un arc de ce cercle, puis redescendre le rayon vers B : le chemin reste dans C . Connexe par arcs. Pas connexe. (c) Plan moins l'origine. Connexe par arcs. Démonstration. Pour $A, B \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on peut connecter par un chemin qui évite l'origine : si A, B sont dans le même demi-plan (ouvert) $\{x > 0\}$ par ex., ligne droite suffit. Sinon, passer par un point intermédiaire P choisi hors des droites (OA) et (OB) : les segments $[A, P]$ et $[P, B]$ évitent l'origine. Connexe par arcs. (d) Plan moins l'axe horizontal. Décomposition en deux composantes, $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} = \{y > 0\} \cup \{y < 0\}$. Chaque demi-plan est connexe (convexe), mais leur union ne l'est pas : les deux demi-plans sont ouverts dans $\mathbb{R}^2$, disjoints, leur union est $\mathbb{R}^2 \setminus \text{axe}$. Pas connexe. Composantes connexes : $\{y > 0\}$ et $\{y < 0\}$ et $\{y = 0\}$ est essentiel. Les réciproques sont fausses, mais comprendre les contre-exemples est essentiel. Connexité topologique fondamentale. Legon. La connexité dépend de la forme du sous-ensemble. Connexe $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ point ne déconnecte pas, mais retirer une droite (ou plus généralement un ensemble qui sépare $\mathbb{R}^2$) déconnecte. Question

• Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$. Démontrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ avec $f(c) = 0$, en utilisant la connexité.

Solution : Théorème des valeurs intermédiaires généralisé. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et X connexe, alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Application. $X = [0, 1]$ est connexe (intervalle), f continue. Donc $f([0, 1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant -1 et 2 , il contient $[-1, 2]$, donc il existe $c \in [0, 1]$ avec $f(c) = 0$. Démonstration alternative directe. Notation. $A = \{x \in [0, 1] : f(x) \leq 0\}$, $A \neq \emptyset$ (0) $\in A$, A majoré par 1. Soit $c = \sup A$. Affirmation. $f(c) = 0$. Preuve. Suite $(x_n) \in A$ avec $x_n \rightarrow c$ (par caractérisation séquentielle de l'adhérence); $f(x_n) \leq 0$, par continuité $f(c) \leq 0$. Si $f(c) < 0$, alors $c < 1$ puisque $f(1) > 0$, et par continuité il existe $\delta > 0$ avec $c + \delta \leq 1$ tel que $f(x) < 0$ pour $x \in [c, c + \delta]$, donc $c + \delta \in A$, contradiction avec $c = \sup A$. Donc $f(c) = 0$. Lien échouerait. Legon. Le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas un résultat sur les espaces connexes. Sa profondeur géométrique : aucune fonction continue ne peut sauter entre deux valeurs sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. La connexité est l'empêchement de saut.

MÉTHODES

Étude 1. ★ MÉTHODE : distances équivalentes et changements de norme

Sur un même ensemble X , plusieurs distances peuvent coexister. Distances équivalentes : même topologie (même notion d'ouvert, même convergence). Critère suffisant : existence de constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$ (équivalence forte/Lipschitz). Sur $\mathbb{R}^n$: toutes les normes sont équivalentes (dim finie). Sur espaces de fonctions : souvent non.

Démontrer que sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Donner les constantes optimales.

- (a) Comparaisons fondamentales.
- (b) Encadrement des trois normes.
- (c) Cas optimal.
- (d) Conséquences topologiques.
- (e) Résumez la méthode.

Solution retournée.

restreignant l'intervalle si nécessaire); (4) appliquer Banach. La construction itérative donne la solution explicitement.
 espace métrique complet (souvent $C([a, b])$ avec norme uniforme); (5) vérifier que l'opérateur est contractant (souvent en
 Pour démontrer existence/unité d'une solution d'équation : (1) reformuler comme point fixe d'un opérateur; (2) choisir un
 $y_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k/k!$, série de Taylor de e^x . Limite uniforme sur tout compact : e^x . Cohérent. (c) Méthode numérique.
 $1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ de e^x . $1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ de e^x . $1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ de e^x .
 $y(x) = e^x$. Itération de Picard. $y_0 = 1$. $y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \, dt = 1 + x$. $y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t) \, dt = 1 + x + x^2/2$.
 vers 1888-1890, appliquée à l'existence pour les EDO en 1891). Exemple : $y' = y$, $y(0) = 1$. Solution attendue
 $y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t)) \, dt$, etc. Cette construction par approximations successives est due à Picard (mise au point
 Géométrique de raison Lb : 1. Premières itérations (approximations de Picard) : $y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_0(t)) \, dt$;
 $y_n + 1 = \Phi(y_n)$, initialisée à la fonction constante égale à y_0 , converge uniformément vers la solution y . Vitesse
 de x_0 se traite de même. Théorème de Cauchy-Lipschitz local : existence et unicité d'une solution sur $[x_0, x_0 + b]$ (le
 prolongement en une solution maximale demande un recollage supplémentaire, admis ici). Construction explicite. La suite
 de f donne $\tilde{y} \in C^1$ et $\tilde{y}' = f(x, \tilde{y})$. C'est l'unique solution à grapher dans R sur $[x_0, x_0 + b]$: c'est le *général*
vérifiés : X_b complet, Φ contractante. Donc Φ a un unique point fixe $\tilde{y} \in X_b$. La forme intégrale et la continuité
 $Lb\|y_1 - y_2\| \leq \| \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \|$. Le choix de b donne $Lb \leq 1/2 < 1$, y compacts si $L = 0$. (d) Application du théorème. Conditions
 $\| \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \| \leq Lb \|y_1 - y_2\|$. Donc $\| \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \| \leq Lb \|y_1 - y_2\|$.
 $\Phi(y) = \Phi(y_1) - \Phi(y_2) = \int_0^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) \, dt$. Par Lipschitz $|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1(t) - y_2(t)|$.
 et non vide. Pour $y \in X_b$, $\Phi(y) \in X_b$. $\Phi : X_b \rightarrow X_b$. (c) Construction. Soit $y_1, y_2 \in X_b$.
 ne restreint pas b . Dans $X = C([x_0, x_0 + b], \mathbb{R})$, l'ensemble X_b est fermé, complet
 Lipschitz uniforme en $b > 0$ avec $b \leq a, bM \leq b$ et $bL \leq 1/2$: une condition dont le coefficient est nul
 $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ soit dans le domaine de f , et poset $M = \max_{R} |f|$. Une constante de
 $\int_0^x f(t, y(t)) \, dt$. Solution $\Leftrightarrow$ point fixe de Φ . (b) Espace complet et intervalle. Choisir $a, b > 0$ tels que le rectangle
 $f(x, y(x))$. Forme intégrale (équivalente). $y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) \, dt$. Définir l'opérateur Φ : $y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) \, dt = y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) \, dt$
 Solution 3 : (a) Reformulation. Problème. Trouver $y : [x_0, x_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $y(x_0) = y_0$ et $y'(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) \, dt$

Étude 4. ★★ MÉTHODE : compacité dans $\mathbb{R}^n$ et fermeture

Dans $\mathbb{R}^n$, le théorème de Heine-Borel caractérise les compacts comme les fermés bornés. Méthode : pour démontrer qu'un sous-ensemble est compact, vérifier (a) fermé (caractérisation séquentielle ou image réciproque continue) et (b) borné. Hors de $\mathbb{R}^n$ (dim infinie), insuffisant : critères supplémentaires nécessaires (équicontinuité dans $C([a, b])$, etc.).

Pour $n \geq 1$, démontrer que la sphère unité euclidienne $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'une fonction continue $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ atteint ses bornes.

(a) S^{n-1} est fermée.

(b) S^{n-1} est bornée.

(c) Compacité.

(d) Application : extrema.

(e) Résumez la méthode.

Solution retournée.

Solution 4 : (a) S^{n-1} est fermé. Définition. $S^{n-1} = \{x : \|x\| = 1\}$. Caractérisation par fonction continue. $S^{n-1} = \mathcal{S}^{-1}(\{1\})$ où $\mathcal{S}(x) = \|x\|$ continue (norme). $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Image réciproque par continue d'un fermé est fermée. Donc S^{n-1} est fermée. Vérification séquentielle (alternative). Soit $(x_k) \subset S^{n-1}$ avec $x_k \rightarrow x$. Continuité de la norme : $\|x_k\| \rightarrow \|x\|$. Or $\|x_k\| = 1$. Donc $\|x\| = 1$. $x \in S^{n-1}$. Cohérent. (b) S^{n-1} est bornée. Tous les éléments ont norme 1. Donc $S^{n-1} \subseteq \overline{B}(0, 1)$ (boule fermée de rayon 1). Bornée (c) Compacité Par Heine-Borel dans $\mathbb{R}^n$, fermé + borné $\Rightarrow$ compact. Donc S^{n-1} est compact. (d) Application : extréma. Soit $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Image continue d'un borné est compact. $f(S^{n-1}) \subseteq \mathbb{R}$ compact. Compact dans $\mathbb{R}$ = fermé borné : $f(S^{n-1})$ a un sup $M \in f(S^{n-1})$ (limite de suite, fermé) et un inf $m \in f(S^{n-1})$. Donc f atteint son maximum et son minimum sur S^{n-1} . Application classique. Norme matricielle subordonnée. $\|A\|_2 = \sup_{x \in S^{n-1}} \|Ax\|$. Continuité : $x \mapsto \|Ax\|$ est continue. Atteinte du sup : il existe $x_0 \in S^{n-1}$ avec $\|Ax_0\| = \|A\|_2$. Vecteur singulier de A . Application. Existence d'un vecteur propre maximisant pour matrices symétriques (théorème spectral via maximisation sur la sphère). (e) Méthode résumée. En dim finie ($\mathbb{R}^n$) : (1) montrer fermé (image réciproque, caractérisation séquentielle, ou définition par égalités/inégalités. En dim infini : (2) montrer borné (inclusion dans une boule); (3) appliquer Bolzano-Weierstrass. Avantage : simple. Limitation en dim infini : fermé + borné $\neq$ compact. Critères de compacité : le critère général est complétude + précompactité (totale bornitude); l'équiconnuité (Arzela-Ascoli, voir Expédition 2) est le critère spécifique dans $C(X)$.

Étude 5. ★★ MÉTHODE : connexité par arcs et valeur intermédiaire

La connexité par arcs : pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Implique la connexité (réciproque fausse en général). Théorème des valeurs intermédiaires généralisé : $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, X connexe $\Rightarrow f(X)$ est un intervalle. Méthode : pour démontrer un « théorème des valeurs intermédiaires », vérifier la connexité du domaine.

Démontrer qu'un convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs (donc connexe). En déduire que le « théorème des valeurs intermédiaires » s'étend à toute fonction continue $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ pour C convexe.

- (a) Convexité $\Rightarrow$ connexité par arcs.
- (b) Connexité par arcs $\Rightarrow$ connexité.
- (c) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé.
- (d) Application.
- (e) Résumez la méthode.

Solution retournée.

Solution : (a) Convexe $\Rightarrow$ connexe par arcs. Définition convexe. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tous $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C$. Construction du chemin. Pour $x, y \in C$, posez $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. Vérifications. (i) $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. (ii) γ continue (combinaison linéaire avec t). (iii) $\gamma(t) \in C$ pour $t \in [0, 1]$ par convexité. Donc C connexe par arcs. (b) Connexité par arcs $\Rightarrow$ connexité. Démonstration par contre-exemple. Si X n'est pas convexe, il existe une partition $X = U \sqcup V$ avec U, V ouverts non vides. Soit $x \in U, y \in V$. S'il existait un chemin γ de x à y , alors $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ formeraient une partition de $[0, 1]$ en deux ouverts non vides (puisque γ continu, image réciproque d'ouverts est ouverte), mais $[0, 1]$ est connexe, contradiction. Donc X pas convexe par arcs. Contre-exemple prouvé. (c) Théorème des valeurs intermédiaires généralisé. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continue. C convexe (donc connexe). $f(C)$ est convexe (image continue d'un convexe). Or les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Donc $f(C)$ est un intervalle. (d) Application. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f prend deux valeurs $a < b$, alors elle prend toute valeur intermédiaire $c \in [a, b]$. $\mathbb{R}^n$ est convexe (donc connexe). Image est un intervalle contenant a, b , donc $[a, b]$. Donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ avec $f(x) = c$. Exemple concret. Pour démontrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule, il suffit de montrer qu'elle prend des valeurs $a < 0 < b$. Plus subtil. Si C est un domaine non convexe (par ex. un anneau), la connexité (par arcs) reste, et le théorème s'applique. Mais sur un espace non convexe, le théorème échoue. (e) Méthode résumée. Pour démontrer un théorème s'appliquant à un convexe, il faut conclure que l'image est un intervalle dans $\mathbb{R}$. Connexité par convexe est le cas le plus simple, mais la connexité par arcs (sans convexe) est aussi suffisante pour ce résultat.

Étude 6. ★ ★ ★ MÉTHODE : deux conséquences du théorème de Baire

Le théorème de Baire est démontré à l'article 21 pour tout espace métrique complet : une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. On le prend pour acquis et l'on en tire deux énoncés que l'on ne sait pas obtenir autrement : $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$, et un espace de Banach de dimension infinie n'a pas de base algébrique dénombrable. Méthode : (1) écrire l'espace complet comme réunion dénombrable de fermés; (2) montrer que chacun est d'intérieur vide; (3) conclure à la contradiction.

Démontrer les deux énoncés.

(a) $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ : supposer $\mathbb{Q} = \bigcap_n U_n$ avec U_n ouverts, et écrire $\mathbb{R}$ comme réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

(b) Un espace de Banach E n'a pas de base de Hamel dénombrable infinie (e_n) : considérer $F_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

(c) En déduire que l'espace des polynômes n'est complet pour aucune norme, et résumer.

Solution retournée.

Solution 6 : (a) Chaque U_i contient $\mathbb{Q}$, donc est dense; $F_n = \mathbb{R} \setminus U_n$ est fermé d'intérieur vide (un ouvert non vide contenu dans F_n rencontrerait U_n). Alors $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, contradiction avec Baire ($\mathbb{R}$ est complet) : $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ , et son complémentaire, qui en est un $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$, n'est pas un F_σ . (b) F_n est un sous-espace de dimension finie, donc fermé (complet, car de dimension finie). Il est d'intérieur vide = F_n contenait une boule $B(x, r)$, il contiendrait $B(0, r) = B(x, r) - x$, donc tout vecteur par homothétie, et $F_n = F_n$ contenaient à la dimension infinie. Si (e_n) était une base de Hamel, $E = \bigcup_n F_n$ serait une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide : contradiction. (c) L'espace $\mathbb{R}[X]$ a la base de Hamel dénombrable (X^n) ; s'il était complet pour une norme, (b) serait contredit : aucune norme ne le rend complet, et toute complétion (celle de la norme uniforme un énoncé de cardinalité (dénombrable) en un énoncé topologique (intérieur vide)), et c'est ce passage qui rend ces deux résultats inaccessibles aux méthodes directes.

RÉCAPITULATIF DES MÉTHODES

DISTANCE : $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec *séparation, symétrie, inégalité triangulaire*.

DISTANCES ÉQUIVALENTES : *Mêmes ouverts*. En dim finie, *toutes les normes sont équivalentes*.

BOULE OUVERTE / FERMÉE : $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$, $\bar{B}(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\}$.

OUVERT : U ouvert si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U$.

FERMÉ : F fermé si $X \setminus F$ ouvert. *Caract. séq.* : suite de F qui converge a sa limite dans F .

ADHÉRENCE : $\bar{A} = \{x \in X : \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x\}$. Plus petit fermé contenant A .

SUITE DE CAUCHY : $\forall \varepsilon, \exists N, m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

ESPACE COMPLET : Toute suite de Cauchy converge. Ex. : $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, C([a, b])_{d_\infty}$.

POINT FIXE DE BANACH : X complet non vide, f contractante de rapport $k < 1 \Rightarrow$ unique point fixe, atteint par itération.

COMPACT (SÉQUENTIEL) : Toute suite a une sous-suite convergente. $\Leftrightarrow$ recouvrements finis.

BOLZANO-WEIERSTRASS : Dans $\mathbb{R}^n$, compact $\Leftrightarrow$ fermé borné. Faux en dim infinie.

IMAGE CONTINUE D'UN COMPACT : Compact. Conséquence : extrema atteints sur un compact non vide.

CONNEXE : Pas partition $X = U \sqcup V$ ouverts non vides. Connexes de $\mathbb{R}$ = intervalles.

TVI GÉNÉRALISÉ : $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, X connexe $\Rightarrow f(X)$ intervalle.

THÉORÈME DE BAIRE : Espace métrique complet : toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense; dual : une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

EXPÉDITIONS

EXPÉDITION 1 : THÉORÈME DE BAIRE ET APPLICATIONS

Prérequis : études 6.

Le théorème de Baire (René-Louis Baire, 1899, thèse de doctorat) affirme qu'un espace métrique complet non vide n'est jamais réunion dénombrable d'ensembles « petits ». Cette propriété, à première vue technique, fonde les trois piliers de l'analyse fonctionnelle moderne : Banach-Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé. Elle démontre aussi des résultats inattendus : au sens de Baire, presque toute fonction continue est nulle part dérivable, presque tout réel est un nombre de Liouville.

(a) Énoncé (Baire, démontré à l'article 21, utilisé à l'étude 6 et repris ici) : dans un espace métrique complet, l'intersection d'une suite dénombrable d'ouverts denses est dense.

(b) Reformulation duale : une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

(c) Théorème de Banach-Steinhaus (1927) : famille d'opérateurs bornée ponctuellement $\Rightarrow$ bornée uniformément.

(d) *Existence générique de phénomènes rares : fonctions partout non dérivables (Banach 1931).*

(e) *Topologie générique : le « type le plus fréquent » n'est pas toujours intuitif.*

Le théorème de Baire est l'une des fondations de l'analyse fonctionnelle.

Histoire. René-Louis Baire (1874-1932, mathématicien français), dans sa thèse de doctorat (Sur les fonctions de variables réelles, 1899), introduit la notion d'ensemble maigre (réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses) et démontre que $\mathbb{R}$, comme tout espace métrique complet, n'est pas maigre en lui-même. Cette idée en apparence technique s'est révélée un outil structurant pour toute l'analyse du XX^e siècle.

Énoncé. Soit (X, d) un espace métrique complet (ou, plus généralement, localement compact) et $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ouverts denses de X ; alors leur intersection $\bigcap_n U_n$ reste dense. La forme duale s'obtient par passage au complémentaire : si $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide, leur réunion $\bigcup_n F_n$ est encore d'intérieur vide. Le vocabulaire consacré accompagne l'énoncé : on appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts, F_σ une réunion dénombrable de fermés, maigre (ou de première catégorie) une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses (par exemple un F_σ d'intérieur vide), et commaigre ou résiduel le complémentaire d'un maigre (il contient alors un G_δ dense). Sous cette forme brève, le théorème dit que dans un espace complet le complémentaire d'un maigre est dense.

Applications. Le théorème irrigue toute l'analyse fonctionnelle. Le théorème de Banach-Steinhaus, ou principe de bornitude uniforme, en est la conséquence la plus directe : pour une famille (T_α) d'opérateurs linéaires continus d'un espace de Banach X dans un espace normé Y , la bornitude ponctuelle ($\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$ pour chaque x) entraîne la bornitude uniforme ($\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$). La preuve pose $E_n = \{x : \sup_\alpha \|T_\alpha x\| \leq n\}$: chaque E_n est fermé et leur réunion est X tout entier, de sorte que le théorème de Baire interdit qu'ils soient tous d'intérieur vide; l'un d'eux contient donc une boule $\bar{B}(x_0, r)$, et l'homogénéité donne alors $\sup_\alpha \|T_\alpha\| \leq 2n_0/r$. Le même ressort fournit le théorème de l'application ouverte (Banach, 1929), selon lequel tout opérateur linéaire continu surjectif entre espaces de Banach est ouvert, ainsi que le théorème du graphe fermé, qui rend continu tout

opérateur linéaire défini sur tout un espace de Banach, à valeurs dans un autre Banach, dont le graphe est fermé.

Baire sert aussi à établir l'existence d'objets exotiques par un argument de généralité. Banach démontre ainsi en 1931 que l'ensemble des fonctions de $C([0, 1])$ partout non dérivables est comigre (il contient un G_δ dense) : presque toute fonction continue, au sens de Baire, n'est dérivable en aucun point, si bien que la classe « régulière » que suggère l'intuition est en réalité l'exception. De même, les nombres de Liouville, ces irrationnels que les rationnels approchent à toute vitesse polynomiale, forment un G_δ dense de $\mathbb{R}$: presque tout réel est de Liouville au sens topologique, alors même que leur ensemble est de mesure de Lebesgue nulle.

Topologie générique et mesure. *Une propriété vérifiée sur un G_δ dense est dite générique. Ces exemples en dégagent la morale : le « typique » au sens topologique est souvent contre-intuitif, les phénomènes réputés « pathologiques » sont en fait omniprésents, et les objets que l'intuition juge normaux (fonctions dérivables, nombres rationnels) se révèlent atypiques. Il faut toutefois se garder de confondre les deux notions de petitesse : la généralité topologique (complémentaire d'un maigre) et la plénitude en mesure (complémentaire d'un ensemble de mesure nulle) ne coïncident pas toujours. L'ensemble de Cantor gras, maigre mais de mesure $1/2$, montre qu'un ensemble peut être petit topologiquement sans l'être en mesure.*

Compte rendu retourné.

Compte rendu 1 : (a) Énoncé : Espace métrique complet (X, d) . Soit (U_n) une suite d'ouverts denses. $\bigcap U_n$ est dense. (b) Définition d'équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (c) Idée de la démonstration (l'article 22 la donne en entier, on ne la refait pas) : extraction diagonale sur une partie dénombrable dense, puis passage à la convergence uniforme par équicontinuité. (d) Application : théorème de Cauchy-Peano (existence de solutions d'EDO sans Lipschitz).

Compte rendu 2 : (a) Énoncé : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur $[a, b]$. Si $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée, alors $\mathcal{F}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme. (b) Définition d'équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (c) Idée de la démonstration (l'article 22 la donne en entier, on ne la refait pas) : extraction diagonale sur une partie dénombrable dense, puis passage à la convergence uniforme par équicontinuité. (d) Application : théorème de Cauchy-Peano (existence de solutions d'EDO sans Lipschitz).

Compte rendu 3 : (a) Énoncé : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur $[a, b]$. Si $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée, alors $\mathcal{F}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme. (b) Définition d'équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (c) Idée de la démonstration (l'article 22 la donne en entier, on ne la refait pas) : extraction diagonale sur une partie dénombrable dense, puis passage à la convergence uniforme par équicontinuité. (d) Application : théorème de Cauchy-Peano (existence de solutions d'EDO sans Lipschitz).

Compte rendu 4 : (a) Énoncé : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur $[a, b]$. Si $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée, alors $\mathcal{F}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme. (b) Définition d'équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (c) Idée de la démonstration (l'article 22 la donne en entier, on ne la refait pas) : extraction diagonale sur une partie dénombrable dense, puis passage à la convergence uniforme par équicontinuité. (d) Application : théorème de Cauchy-Peano (existence de solutions d'EDO sans Lipschitz).

EXPÉDITION 2 : THÉORÈME D'ASCOLI-AZZALI

Prérequis : études 4.

Le théorème d'Ascoli-Arzelà (Giulio Ascoli 1883, Cesare Arzelà 1895) caractérise les sous-ensembles relativement compacts de $C([a, b])$ par deux conditions : équicontinuité (toutes les fonctions varient « de manière uniforme ») et bornitude uniforme. Ce théorème est l'un des piliers de l'analyse fonctionnelle classique : il fournit le critère de compacité dans les espaces de fonctions et permet l'extraction de sous-suites convergentes, base des théorèmes d'existence (Cauchy-Peano, Cauchy-Lipschitz, Schauder).

(a) Énoncé : $\mathcal{F} \subseteq C([a, b])$ est relativement compact (adhérence compacte) ssi $\mathcal{F}$ est borné uniformément ET équicontinu.

(b) Définition d'équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(c) Idée de la démonstration (l'article 22 la donne en entier, on ne la refait pas) : extraction diagonale sur une partie dénombrable dense, puis passage à la convergence uniforme par équicontinuité.

(d) Application : théorème de Cauchy-Peano (existence de solutions d'EDO sans Lipschitz).

(e) *Lien avec la compacité dans les espaces de Banach et le théorème de point fixe de Schauder (énoncé admis, chapitre 13).*

Le théorème d'Ascoli-Arzelà caractérise la compacité dans l'espace des fonctions continues.

Histoire. Giulio Ascoli (1843-1896, *mathématicien italien*) établit en 1883-1884 la condition suffisante : l'équicontinuité jointe à la bornitude uniforme assure l'existence d'une sous-suite uniformément convergente. Cesare Arzelà (1847-1912) prouve en 1895 la condition nécessaire et donne la formulation moderne complète du théorème.

Importance. *Au tournant du XX^e siècle, l'analyse fonctionnelle naissante réclame des critères de compacité valables hors de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui identifie compacité et fermé borné, ne fonctionne plus en dimension infinie; Ascoli-Arzelà fournit le critère manquant pour $C([a, b])$.*

Énoncé. *Soit (K, d) un espace métrique compact, par exemple $K = [a, b]$. Une partie $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ est relativement compacte (d'adhérence compacte dans $(C(K), d_\infty)$) si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

- bornitude uniforme : $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty$;
- équicontinuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in K, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

L'équicontinuité est une continuité « uniforme en f » : un même δ convient à toutes les fonctions de $\mathcal{F}$, qui partagent ainsi la même régularité locale. Le cas le plus fréquent est celui d'une famille équi-Lipschitzienne, où $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ avec une constante L commune, ce qui entraîne aussitôt l'équicontinuité.

Démonstration. *Elle est donnée à l'article 22; on en retient les deux mouvements, extraction diagonale sur une partie dénombrable dense de K , puis promotion de la convergence ponctuelle en convergence uniforme par l'équicontinuité, et, pour la réciproque, le recouvrement fini de l'adhérence par des boules, chaque centre étant uniformément continu sur le compact K .*

Applications. *Le théorème est le moteur de nombreux résultats d'existence. Le théorème de Cauchy-Peano (1886) affirme que, pour un second membre*

seulement continu, l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ admet au moins une solution locale, sans hypothèse de Lipschitz et donc sans garantie d'unicité : on se place sur un rectangle compact $[x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ où $M = \max |f|$ existe, puis l'on restreint à $[x_0, x_0 + b]$ avec $b = \min(a, b/M)$ (tout $b \leq a$ si $M = 0$) pour que les polygones d'Euler de pas h/n y restent; ils forment alors une famille uniformément bornée et équicontinue (pente majorée par M), puis Ascoli-Arzelà en extrait une sous-suite uniformément convergente dont la limite vérifie l'équation. Le théorème de point fixe de Schauder (1930), qui étend celui de Brouwer aux convexes compacts d'un espace de Banach, repose sur le même principe de réduction à la dimension finie et débouche sur des théorèmes d'existence en équations aux dérivées partielles et en mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes). La compacité de la boule unité de l'espace de Hölder $C^{0,\alpha}([a, b])$, $0 < \alpha \leq 1$, muni de sa norme complète dans $C([a, b])$, autre conséquence d'Ascoli, est un outil clé en analyse harmonique et en EDP, et la théorie de la compacité par compensation de Murat et Tartar (années 1970) en prolonge l'esprit pour les problèmes non linéaires. Le théorème a ses limites, puisqu'il ne concerne que des fonctions continues sur un compact; ses extensions portent les noms de Kolmogorov-Riesz pour les espaces L^p et d'Aubin-Lions pour les problèmes d'évolution.

Philosophie. La compacité dans un espace de fonctions exige deux contrôles simultanés : que les fonctions ne soient pas trop grandes (bornitude) et qu'elles ne varient pas trop vite (équicontinuité). C'est ce second contrôle qui vient remplacer le théorème de Bolzano-Weierstrass, inopérant en dimension infinie.

Compte rendu retourné.

pour théorèmes d'existence en EDO/EDP.
 (analogue d'Ascoli pour Sobolev) : $H^1_1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact pour Ω borné régulier. Outil fondamental en
 (i) vérifier la bornitude uniforme (souvent via une borne uniforme sur la dérivée ou Lipschitz
 (ii) vérifier la bornitude uniforme, méthodes variationnelles). (b) Méthode de Ascoli-Arzelà. Conséquence : extraction de sous-suite uniformément convergente. Outil universel
 Exemple. $y' = 3y^2/3$, $y(0) = 0$. Solutions : $y(x) = 0$ et $y(x) = x^3$. Deux solutions par même donnée initiale.
 Cauchy-Lipschitz : ajout de Lipschitz donne unicité. (g) Application : compactes en EDP. Le théorème de Rellick-Kondratiev
 à $y' = f(x, y)$. Existence prouvée. (i) Différence Peano vs Lipschitz. Peano : existence sans Lipschitz, mais pas d'unicité.
 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ uniformément. Convergence uniforme : passage à la limite donne $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, équivalent
 de f sur le rectangle (sur chaque pas de longueur b/n , l'intégrande diffère de sa valeur au nœud d'un plus $\omega((1+M)b/n)$) :
 $y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \varepsilon_n(x) \leq y(x) \leq y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \varepsilon_n(x)$, ω étant le module de continuité uniforme
 Ascoli-Arzelà : extraction sous-suite uniformément convergente $y_n \rightarrow y$. Vérification que y est solution. $y_n(x) = M$.
 (ii) Équiconuité. $|y_n(x) - y_n(x')| \leq M|x - x'|$ (pas de pente $> M$). Donc $\{y_n\}$ équi-Lipschitzien. $L = M$.
 $y_n(x_k) + 1 = y_n(x_k) + b_n f(x_k, y_n(x_k)) (x_k) \leq y_n(x) + b_n f(x_k, y_n(x_k)) \leq M(x - x_0) \leq b$.
 (tout $b \leq a$ si M pour que les polygones restent dans R . Méthode des polygones d'Euler : pas $b_n = b/n$,
 $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + b]$, $M = \max_R |f|$: on travaille sur $[x_0, x_0 + b]$, $a = \min(a, b/M)$
 article (c) Application : Cauchy-Peano EDO $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, avec f continue sur un rectangle compact
 est le procédé diagonal et le rôle de l'équiconuité pour passer du dénombrable dense à tout K . (d) Rétroproque. Même
 équiconuité avec $\delta = \varepsilon/L$ pour $L > 0$ (si $L = 0$, tout δ convient). (e) Démonstration. Voir l'article 22. L'essentiel
 δ uniforme en f . Cas particulier important. Si $\mathcal{F}$ est équi-Lipschitzien ($\exists L, \forall f, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$), alors
 (b) Définition équiuniformité. Différence avec continuité uniforme : continuité uniforme δ dépend de f , équiuniformité,
 (bornitude uniforme). (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (équiuniformité).
 Compte rendu 2 : (a) Énoncé. K métrique compact. $\mathcal{F} \subset C(K, \mathbb{R})$. $\mathcal{F}$ relativement compact si : (i) $\sup_f \|f\| < \infty$

EXPÉDITION 3 : ENSEMBLE DE CANTOR

Prérequis : études 2, 4.

L'ensemble de Cantor (Georg Cantor, 1883) est l'un des objets mathématiques les plus paradoxaux. Construit par retraites successifs de tiers d'intervalles, il est à la fois : compact (fermé borné), totalement discontinu (aucun intervalle), parfait (tout point est limite d'autres points), de mesure nulle mais non dénombrable (cardinalité du continu), et auto-similaire. Ces propriétés, à première vue contradictoires, illustrent la richesse insoupçonnée de la topologie des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

(a) Construction : $C_0 = [0, 1]$. À chaque étape n , retirer le tiers central de chaque sous-intervalle. $C = \bigcap_n C_n$.

(b) Caractérisation : $C = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k \geq 1} a_k / 3^k, a_k \in \{0, 2\}\}$ (pas de chiffre 1 dans le développement triadique).

(c) Compact, totalement discontinu, parfait.

(d) Mesure de Lebesgue 0, mais cardinalité $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (continuum).

(e) Auto-similarité (fractale), dimension de Hausdorff $\log 2 / \log 3 \approx 0,631$.

L'ensemble de Cantor est l'archétype des objets fractals et un défi à l'intuition.

Histoire. Georg Cantor (1845-1918, *mathématicien allemand*) introduit cet ensemble en 1883 dans *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (« Sur les ensembles linéaires infinis de points »), l'un de ses travaux fondateurs de la théorie des ensembles, alors qu'il cherchait des contre-exemples aux conjectures naïves sur la topologie de $\mathbb{R}$.

Construction. On part de $C_0 = [0, 1]$ et l'on retire à chaque étape le tiers central ouvert de chaque intervalle restant : la première étape ôte $(1/3, 2/3)$ et laisse $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, la deuxième laisse $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$, et plus généralement C_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} . L'ensemble de Cantor est l'intersection $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Il admet une description arithmétique commode : tout $x \in [0, 1]$ s'écrit $x = \sum_{k \geq 1} a_k 3^{-k}$ avec $a_k \in \{0, 1, 2\}$, et retirer les tiers centraux revient exactement à interdire le chiffre 1, de sorte que $C = \{x : a_k \in \{0, 2\} \text{ pour tout } k\}$. Il suffit de lever l'ambiguïté des développements triadiques, en convenant par exemple d'écrire $1/3 = 0,0222 \dots$ plutôt que $0,1000 \dots$; ainsi $1/3$ et $2/3$ appartiennent bien à C .

Propriétés paradoxales. L'ensemble C réunit des propriétés en apparence incompatibles. Il est compact, comme partie fermée (intersection des fermés C_n) et bornée de $\mathbb{R}$. Il est totalement discontinu, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle : un intervalle $[a, b]$ non trivial est trop long pour tenir dans un seul des morceaux de longueur 3^{-n} dès que n est assez grand, et il rencontre donc forcément un tiers retiré. Il est pourtant parfait, c'est-à-dire fermé et sans point isolé : en modifiant le développement triadique d'un point $x \in C$ à partir d'un rang de plus en plus grand, on fabrique des éléments de C distincts de x qui convergent vers lui. Il est de mesure de Lebesgue nulle, puisque $\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = (2/3)^n$ pour tout n . Et malgré cette longueur nulle il a la cardinalité du continu : la correspondance $a_k \leftrightarrow a_k/2$ établit une bijection entre C et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donc une surjection sur $[0, 1]$ par développement binaire (l'ambiguïté des dyadiques, dénombrable, ne change pas la cardinalité, par double injection), si bien que $|C| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ et que C contient autant de points que le segment tout entier.

Fractale. L'ensemble est auto-similaire : $C = \frac{1}{3}C \cup (\frac{1}{3}C + \frac{2}{3})$ est la réunion de deux copies de lui-même réduites d'un facteur $1/3$. Le théorème de dimension des ensembles auto-similaires sous condition de l'ouvert (admis ici) donne $d = \log N / \log(1/r)$ pour N similitudes de même rapport $0 < r < 1$. Ici leurs images de $]0, 1[$ sont disjointes et contenues dans $]0, 1[$: la condition est vérifiée, d'où une dimension de Hausdorff fractionnaire $d_H = \log 2 / \log 3 \approx 0,631$, intermédiaire entre celle d'un point et celle d'un intervalle. Topologiquement, C est homéomorphe à l'espace de Cantor abstrait $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit, et un théorème de Brouwer (1910) en donne la réciproque : tout espace métrique compact non vide, totalement discontinu et parfait lui est homéomorphe, ce qui fait de C un modèle universel. En modifiant les longueurs retirées (retrancher $1/4$, puis $1/16$, et ainsi de suite) on obtient l'ensemble de Smith-Volterra-Cantor, ou « Cantor gras », qui garde la même structure topologique tout en ayant une mesure strictement positive, par exemple $1/2$.

Applications et postérité. L'ensemble de Cantor irrigue plusieurs domaines. En théorie de la mesure, il montre qu'un ensemble non dénombrable peut être négligeable et sépare nettement le « petit topologiquement » du « petit en mesure ». En théorie des ensembles, il accompagne l'introduction des cardinaux infinis par Cantor et sa preuve que $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ (1874, puis par l'argument diagonal en 1891). En topologie et en dynamique, l'espace de Cantor abstrait réapparaît partout, des espaces p -adiques à la dynamique symbolique et à la théorie des codes. Il est enfin le prototype de l'attracteur fractal, sur lequel s'appuiera Mandelbrot en fondant la théorie des fractales (1975). L'histoire retient aussi que Cantor eut à subir l'hostilité de Kronecker, pour qui « Dieu a créé les entiers, le reste est l'œuvre de l'homme » ; ses idées sur l'infini actuel comptent aujourd'hui parmi les sources les plus fécondes des mathématiques modernes.

Compte rendu retourné.

topologie, dynamique, théorie des codes, fractales. Le contre-exemple universel.
 parfait + mesure nulle + cardinalité du continu + tracé). Apparaît dans tous les domaines : théorie des ensembles, mesures,
 construction par retrait itéré, caractérisation tridimensionnelle simple, propriétés paradoxales (compact + totalement discontinu +
 est homéomorphe à l'espace de Cantor abstrait, donc à C . Caractérisation universelle. (k) Méthode de Cantor en bref :
 Théorème de Brouwer (1910, admis ici) : tout espace métrique compact non vide totalement discontinu et sans point isolé
 métrisable par $d(x, y) = 2^{-\min\{k: x_k \neq y_k\}}$ pour $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$. Compact totalement discontinu parfait.
 Démonstre que mesure positive et totalement discontinu coexistent. (l) Espace de Cantor abstrait, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ avec topologie produit.
 Cantor gras à mesure $1 - 1/2 = 1/2$. Mais structurellement comme Cantor : compact totalement discontinu parfait.
 1/3, retirer $1/4, 1/16, 1/64, \dots$ aux étapes successives. Mesure totale retirée : $\sum 2^{-n} - 1/4^n = 1/2$. Donc le
 Cantor gras a mesure $1 - 1/2 = 1/2$. Mais structurellement comme Cantor : compact totalement discontinu parfait.
 admis), pour N similitudes de même facteur $0 < r < 1$, $d = \log N / \log(1/r) = \log 2 / \log 3 \approx 0,6309$.
 Donc Cantor a dimension $\sim 0,631$. Plus que 0, moins que 1. (i) Variétés : ensemble de Cantor gras. Au lieu de retirer
 copies de lui-même, chacune $1/3$ plus petite. Dimension de Hausdorff : sous la condition de l'ouvert, vérifiée ici (théorème
 (h) Auto-similaire et dimension fractale. $C = \alpha(C) \cup (\alpha(C) + 2/3)$ où $\alpha(x) = x/3$. Cantor est l'union de 2
 du continu. Donc C non dénombrable. Paradoxe apparaît : ensemble de mesure nulle mais avec autant de points que $[0, 1]$.
 $\lambda(C) \leq (2/3)^n$ pour tout n . $\lambda(C) = 0$. (g) Cardinalité $|C| = |\{0, 2\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = c$. C a la cardinalité
 de C distincts, x n'est pas isolé. C parfait. (f) Mesure de Lebesgue. $0, \lambda(C_n) = 2^n \cdot 3^{-n} = (2/3)^n$. $C \subseteq C_n$:
 rang $n + 1$ (changer 0 en 2 ou 2 en 0). $x_n \in C$, $x_n \neq x$, $|x - x_n| \leq 2/3^{n+1} \rightarrow 0$. Donc x est limite d'éléments
 $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ avec $a_k \in \{0, 2\}$. Définir x_n : même développement que x jusqu'au rang n , puis modifier le
 $[a, b] \subseteq C$ (e) Parfait. Pour $x \in C$, il existe $(x_n) \in C \setminus \{x\}$ avec $x_n \rightarrow x$. Démonstration. Représentation tridimensionnelle
 de longueur 3^{-n} , donc $[a, b]$ ne peut tenir dans un seul morceau. Donc $[a, b]$ contient un trou retiré, contradiction avec
 aucun intervalle $C \subseteq [a, b]$ pour n assez grand, mais C_n est l'union d'intervalles
 C bornés dans $[0, 1]$. C fermé (intersection de fermés). Balzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$: C compact. (d) Totalement discontinu.
 sans 1, et non cette propriété pour tous les développements : $1/3 = 0,0222 \dots$. On demande l'existence d'un développement
 $x = \sum a_k 3^{-k}$. Réciproquement, une telle somme appartient à chaque C_n . On demande l'existence d'un développement
 $x \in C$, ces intervalles emboîtés déterminent une suite de chiffres et leur longueur 3^{-n} tend vers zéro, donnant
 $\{0, 2\}^k$. Démonstration. Les 2^n intervalles fermés de C_n correspondent aux préfixes de longueur n sur $\{0, 2\}$. Pour
 (b) Caractérisation tridimensionnelle. Théorème. $C = \{x \in [0, 1] : x \text{ admet une représentation tridimensionnelle avec } a_k \in$
 chaque intervalle constituant C_{n-1} . Structure de C_n : 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} . Cantor : $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
 Compte rendu 3 : (a) Construction itérative. $C_0 = [0, 1]$. C_n obtenu de C_{n-1} en retirant le tiers central ouvert de

LECTURES COMPLÉMENTAIRES

- **Fréchet, M.** (1906, thèse), introduction des espaces métriques.
- **Choquet, G.** (1964), Topologie (Cours d'analyse, t. II), Masson.
- **Munkres, J.R.** (2000), Topology, Prentice Hall, ch. 2–3.
- **Skandalis, G.** (2004), Topologie et analyse, Dunod.