



Cours articulé de mathématiques

II

Licence

DE L'ÉNONCÉ À L'ESPACE

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Clem

LICENCE

*Les structures du mathématicien, comme celles du peintre ou du poète,
doivent être belles.*

G. H. HARDY

Cours articulé de mathématiques

II

Licence

DE L'ÉNONCÉ À L'ESPACE

William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Copyright © 2026 William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Collection COURS ARTICULÉ DE MATHÉMATIQUES

Tous droits réservés.

AVANT-PROPOS

Ce volume construit les fondements des mathématiques universitaires en deux cent quatre-vingt-onze articles. Il accompagne le lecteur depuis les premiers pas dans la langue des définitions et des preuves (où l'on apprend que les mots doivent être tenus, que chaque terme doit garder exactement le même sens partout où il apparaît) jusqu'aux portes de la maîtrise, dont le volume suivant posera les outils : analyse fonctionnelle, algèbre commutative, théorie de la mesure.

La collection Cours articulé de mathématiques est bâtie sur une thèse intellectuelle qui traverse les cinq volumes, des Éléments à la Physique mathématique : les mathématiques sont la grammaire génératrice par laquelle la réalité se compose elle-même. Non pas un outil forgé pour décrire la nature, mais la syntaxe interne de ce qui est. Si le volume des Éléments enseignait les premiers mots (nombre, distance, angle, équation), celui-ci enseigne la grammaire : les structures qui gouvernent ces mots et les règles selon lesquelles ils se combinent. L'ordre sur la droite réelle fonde l'analyse ; le groupe isole en trois axiomes le schéma commun à l'addition des entiers, à la composition des permutations et à la multiplication des matrices ; l'espace vectoriel unifie $\mathbb{R}^n$, les polynômes et les fonctions continues sous un même toit axiomatique ; l'espace métrique abstrait la notion de proximité et la transporte à des objets que $\mathbb{R}^n$ ne contient pas.

L'architecture de ce livre est celle de toute la collection : l'unité fondamentale est l'article, non le chapitre. Chaque article traite une seule idée, en deux cent cinquante à huit cents mots. Il s'ouvre sur une tension ou un étonnement, jamais sur une définition sèche. Il se ferme sur une phrase qui fait entendre un principe plus profond que son contenu immédiat. Les articles sont regroupés en chapitres et en parties. Les classes d'équivalence de la théorie des ensembles éclairent le quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de l'arithmétique ; la division euclidienne des entiers éclaire celle des polynômes. Les mêmes principes (dualité, symétrie, passage du local au global, approximation, linéarisation,

quotient, fonctorialité) réapparaissent sous des guises différentes à chaque tournant.

Lire est le premier geste. Mais apprendre la grammaire des mathématiques exige de la pratiquer, et ce volume accompagne chaque chapitre d'un programme d'exercices conçu pour que le lecteur ne soit jamais abandonné. Après chaque article, de courtes gammes font pratiquer immédiatement l'idée qui vient d'être exposée. En fin de chapitre, des études-méthodes enseignent les techniques fondamentales : résolution d'une équation du second degré complexe, base et dimension d'un sous-espace, formule de Grassmann, théorème du rang, étude complète d'une courbe, longueur d'arc, comparaison série-intégrale, intégrale de Gauss en coordonnées polaires, méthode de Newton, inégalités classiques. Chacune est introduite par une leçon, puis mise en œuvre pas à pas. Un récapitulatif rassemble ces méthodes en une page. Enfin, des expéditions guidées mènent le lecteur, par étapes, vers un résultat qu'il n'aurait pas cru à sa portée : la cycloïde brachistochrone, l'inégalité isopérimétrique, le lemme d'échange de Steinitz, les racines de l'unité comme polygones réguliers, l'exponentielle complexe et les formules trigonométriques, le théorème fondamental des courbes planes. Toutes les solutions sont données, détaillées et généreuses, imprimées à l'envers au pied de chaque exercice : le lecteur peut tenter l'exercice sans voir la réponse, puis la consulter en retournant le livre.

Chaque chapitre se termine par un encart Lectures complémentaires pointant la littérature canonique pour la suite : Liret-Martinais, Gourdon, Pommellet en français; Rudin, Apostol, Spivak, Strang, Axler en anglais; quelques classiques historiques quand c'est éclairant. Une demi-page d'annotations brèves : ce ne sont pas des bibliographies exhaustives mais des panneaux indicateurs vers la suite naturelle.

Dix objets compagnons traversent l'ensemble de la collection comme des fils rouges (cf. « Au lecteur ») : le cercle S^1 , les entiers $\mathbb{Z}$, l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, la courbe elliptique $y^2 = x^3 - x$, le groupe GL_2 , la fonction $\zeta(s)$, l'espace L^2 , l'anneau $K[X]$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, et le tore $\mathbb{T}^2$. La licence en traite plusieurs explicitement : $\mathbb{Z}$ se révèle euclidien, principal, factoriel; S^1 devient le groupe des nombres complexes de module 1; $\mathfrak{S}_3$ apparaît comme le plus petit groupe non abélien; $K[X]$ reçoit la division euclidienne et devient le modèle d'anneau principal. La courbe elliptique, le groupe GL_2 , la fonction $\zeta(s)$, l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, l'espace L^2 et le tore $\mathbb{T}^2$ apparaissent ici en filigrane et seront pleinement développés dans les volumes ultérieurs.

À côté de ces dix objets canoniques, certains compagnons pédagogiques récurrents en licence (l'espace $\mathbb{R}^2$, le polynôme $X^2 + 1$, l'exponentielle, les nombres premiers, le corps fini $\mathbb{F}_p$) structurent la progression des chapitres et seront fréquemment convoqués comme exemples.

Les dernières parties du volume ouvrent sur la géométrie euclidienne, la combinatoire et les probabilités, l'intégration multiple et le calcul numérique : le socle sur lequel la maîtrise viendra bâtir.

Le volume suppose acquis le contenu de l'enseignement secondaire : manipulation algébrique, fonctions usuelles, géométrie du plan et de l'espace, rudiments de probabilités. Il prépare le lecteur au volume suivant, Maîtrise, qui couvre la maîtrise : analyse fonctionnelle, théorie de Galois, géométrie différentielle, distributions, et les outils de transition vers la recherche.

Les notations sont standard. Elles suivent la tradition française : $\mathbb{N}$ inclut zéro, $\subset$ signifie inclusion large, $f: A \rightarrow B$ désigne une application, $\|\cdot\|$ une norme. Chaque notation nouvelle est définie lors de sa première occurrence.

L'étudiant qui ouvre ce volume s'apprête à passer de la manipulation des mots à la compréhension des règles qui les gouvernent. C'est un seuil. De l'autre côté, les mathématiques ne sont plus une collection de recettes : elles sont un édifice dont on commence à voir le plan.

AU LECTEUR

Ce cours articule en cinq volumes la grammaire par laquelle la réalité se compose elle-même : plus de mille trois cents articles de mathématiques, du premier nombre entier à la correspondance de Langlands et de la brachistochrone à l'amplituèdre. L'entreprise est vaste. L'auteur ne prétend pas qu'elle soit sans défauts; il affirme qu'elle est sincère.

Chaque article développe une seule idée, de sa motivation à son interprétation. Les définitions sont encadrées. Les résultats (propositions, théorèmes) sont signalés par leur étiquette en gras; dans les volumes 2 et 3, les théorèmes majeurs sont en outre encadrés en rouge. Les preuves sont présentes là où elles éclairent, esquissées là où la rigueur complète aurait obscurci le propos, et admises lorsque leur difficulté excède le cadre de l'article. Le lecteur saura distinguer les trois cas.

Dix objets mathématiques traversent la collection comme des fils rouges : le cercle S^1 , les entiers $\mathbb{Z}$, l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, la courbe elliptique $y^2 = x^3 - x$, le groupe GL_2 , la fonction $\zeta(s)$, l'espace L^2 , l'anneau $K[X]$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, et le tore T^2 . Du calcul trigonométrique au groupe dual de Langlands, de l'oscillateur harmonique à la dualité de Montonen-Olive, chacun de ces objets réapparaît à chaque cycle avec une profondeur nouvelle. Quand l'un se manifeste, le texte le signale.

Les figures, plus de huit cents au total, ont été dessinées avec le soin qu'exige un format de poche : chaque trait a une raison d'être, chaque label est dégagé de toute courbe, et la palette se limite à quatre couleurs. Elles ne remplacent pas la démonstration; elles la précèdent. Le lecteur qui regarde la figure avant de lire le théorème comprendra souvent l'énoncé avant d'en avoir lu un mot.

Dans les volumes I à III, les chapitres de cours se prolongent par des exercices gradués (gammes, études-méthodes, expéditions) dont les solutions détaillées sont imprimées à l'envers au pied de chaque exercice. Le lecteur qui s'y engage trouvera un pédagogue, jamais un examinateur.

Le lecteur peut suivre le chemin linéaire ou emprunter les passages transversaux entre volumes. Les volumes I à III forment une progression continue du lycée à la maîtrise. Le volume IV s'élève vers le programme de Langlands; le volume V, vers la physique mathématique. Tous deux supposent le volume III mais peuvent se lire indépendamment l'un de l'autre.

Toute erreur signalée est une erreur corrigée.

wdf@clementinium.com

NOTE SUR LES CYCLES

Les cinq volumes de la collection accompagnent une progression, des premiers objets mathématiques aux questions de recherche :

- *Éléments (I) : les mathématiques de l'enseignement secondaire, de l'arithmétique aux premières preuves.*
- *Licence (II) : les fondements des études universitaires de mathématiques.*
- *Maîtrise (III) : les approfondissements et la préparation à la recherche.*
- *Correspondances (IV) : le cycle de recherche, du corps de classes au programme de Langlands.*
- *Physique mathématique (V) : le cycle de recherche, des symétries aux cordes.*

Ces niveaux orientent la lecture sans imposer un calendrier universitaire. Les parties et les chapitres donnent les étapes du parcours; le rythme dépend des acquis du lecteur et des questions qu'il souhaite approfondir.

Les volumes I, II et III construisent successivement les prérequis qui permettent d'aborder le suivant. Le lecteur peut entrer directement au niveau dont il possède les acquis. Les volumes IV et V partagent le socle de la Maîtrise et peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. Les passerelles en début de volume précisent le changement de perspective.

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	<i>entiers naturels</i>
$\mathbb{Z}$	<i>entiers relatifs</i>
$\mathbb{Q}$	<i>nombres rationnels</i>
$\mathbb{R}$	<i>nombres réels</i>
$\mathbb{C}$	<i>nombres complexes</i>
$\in$	<i>appartient à</i>
$\subset$	<i>inclus dans</i>
$\cup, \cap, \emptyset$	<i>réunion, intersection, ensemble vide</i>
$\mathcal{P}(E)$	<i>ensemble des parties de E</i>
$A \setminus B, A^c$	<i>différence, complémentaire</i>
$\forall, \exists$	<i>pour tout, il existe</i>
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	<i>implique, équivaut à</i>
$ x $	<i>valeur absolue de x</i>
$\sqrt{x}$	<i>racine carrée de x</i>
$\leq, \geq$	<i>inférieur ou égal, supérieur ou égal</i>
π	<i>rapport de la circonférence au diamètre</i>
$[x]$	<i>partie entière de x</i>
∞	<i>infini</i>
$\sin, \cos, \tan, \arctan$	<i>fonctions trigonométriques et réciproque</i>
$\ln, \exp$	<i>logarithme népérien, exponentielle</i>
e	<i>nombre d'Euler ($e \approx 2,718$)</i>
$f'(x)$	<i>dérivée de f en x</i>
$\int_a^b f(x) \, dx$	<i>intégrale de f de a à b</i>
$\sum, \prod$	<i>somme, produit</i>
$n!, \binom{n}{k}$	<i>factorielle, coefficient binomial</i>
i	<i>unité imaginaire, $i^2 = -1$</i>
$\bar{z}, z , \arg(z)$	<i>conjugué, module, argument</i>
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	<i>partie réelle, partie imaginaire</i>
$\rightarrow$	<i>tend vers</i>
$x \mapsto f(x)$	<i>application qui à x associe $f(x)$</i>
$\vec{u}$	<i>vecteur u</i>
$f \circ g$	<i>composée de f et g</i>

$\ x\ $	<i>norme de x</i>
$\langle x, y \rangle$	<i>produit scalaire de x et y</i>
$\dim V$	<i>dimension d'un espace vectoriel V</i>
$\ker f, \operatorname{Im} f$	<i>noyau, image d'une application linéaire</i>
$\det A$	<i>déterminant d'une matrice A</i>
$A^T, M_n(\mathbb{R})$	<i>transposée, matrices carrées d'ordre n</i>
$\operatorname{Vect}(v_1, \dots), \operatorname{rg} f$	<i>sous-espace engendré, rang</i>
$\operatorname{GL}_n, \operatorname{SL}_n, \operatorname{O}_n$	<i>groupes linéaire, spécial linéaire, orthogonal</i>
$\oplus, \otimes$	<i>somme directe, produit tensoriel</i>
$\lim$	<i>limite</i>
$\sup, \inf$	<i>borne supérieure, borne inférieure</i>
$\limsup, \liminf$	<i>limite supérieure, limite inférieure</i>
$O(\cdot), o(\cdot), \sim$	<i>notations de Landau, équivalence asymptotique</i>
$\frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial x}$	<i>dérivation ordinaire, dérivation partielle</i>
∇f	<i>gradient de f</i>
L^p	<i>espace de Lebesgue d'exposant p</i>
C^k	<i>fonctions à dérivées continues jusqu'à l'ordre k</i>
C^∞	<i>fonctions indéfiniment dérivables</i>
μ, λ	<i>mesure, mesure de Lebesgue</i>
$P(A)$	<i>probabilité de l'événement A</i>
$\mathbb{E}(X), \operatorname{Var}(X)$	<i>espérance, variance d'une variable aléatoire</i>
$\mathbf{1}_A$	<i>fonction indicatrice de A</i>
$ G $	<i>cardinal (ordre) d'un groupe fini G</i>
G/H	<i>groupe quotient, pour H normal dans G</i>
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	<i>entiers modulo n</i>
$a \equiv b \pmod{n}$	<i>congruence modulo n</i>
$\cong$	<i>isomorphe à</i>
$\chi_A(\lambda)$	<i>polynôme caractéristique de A</i>
$\sigma(T)$	<i>spectre de l'opérateur T</i>
$\hat{f}, \mathcal{F}(f)$	<i>transformée de Fourier de f</i>
$\operatorname{Res}(f, a)$	<i>résidu de f en a</i>
$\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{C})$	<i>tribu, tribu engendrée par $\mathcal{C}$</i>

Table des matières

Avant-propos	v
Au lecteur	viii
Note sur les cycles	x
Notations	xi
Des Éléments à la Licence	i
 I Apprendre à lire les mathématiques	 2
1 Ce qu'est un énoncé mathématique	3
Méthodes	15
Expéditions	19
2 Ensembles, appartenance, inclusion	24
Méthodes	38
Expéditions	42
3 Implication, équivalence, conditions	46
Méthodes	58
Expéditions	62

4	Quantificateurs et définitions	66
Méthodes		77
Expéditions		81
5	Applications : une correspondance sans hésitation	85
Méthodes		95
Expéditions		99
6	Injectivité, surjectivité, bijectivité	103
Méthodes		113
Expéditions		117
II	Premiers objets d'analyse	121
7	Les nombres réels, l'ordre et l'encadrement	122
Méthodes		135
Expéditions		138
8	Valeur absolue et distance	143
Méthodes		153
Expéditions		156
9	Suites : une fonction sur les entiers naturels	160
Méthodes		173
Expéditions		176
10	La récurrence	181
Méthodes		190
Expéditions		194
11	Premiers pas vers la limite	199
Méthodes		211
Expéditions		215

III	Premiers objets d'algèbre linéaire	219
12	Vecteurs : additionner des déplacements	220
Méthodes		233
Expéditions		236
13	Systèmes linéaires : plusieurs contraintes à la fois	241
Méthodes		252
Expéditions		255
14	Matrices : écrire l'action en tableau	260
Méthodes		270
Expéditions		274
IV	Nombres et arithmétique	279
15	Nombres complexes	280
Méthodes		295
Expéditions		299
16	Arithmétique	303
Méthodes		316
Expéditions		320
V	Fonctions et limites	325
17	Une fonction n'est pas seulement une formule	326
Méthodes		337
Expéditions		342
18	Graphe, variations, comparaisons	347

Méthodes	359
Expéditions	363
19 Composition, restriction, prolongement	368
Méthodes	379
Expéditions	384
20 Équations, images réciproques, inversion	390
Méthodes	404
Expéditions	409
21 S'approcher d'une valeur	414
Méthodes	429
Expéditions	434
22 Limites latérales et limites à l'infini	439
Méthodes	453
Expéditions	458
VI Continuité et dérivation	463
23 Continuité	464
Méthodes	476
Expéditions	481
24 Théorèmes fondamentaux de la continuité	486
Méthodes	497
Expéditions	502
25 Taux d'accroissement et dérivée	508
Méthodes	521
Expéditions	525
26 Règles de calcul	531

Méthodes	542
Expéditions	547
27 Rolle et accroissements finis	553
Méthodes	564
Expéditions	569
28 Variations, extrema, convexité	575
Méthodes	587
Expéditions	593
VII Fonctions usuelles et intégration	599
29 Logarithme et exponentielle	600
Méthodes	619
Expéditions	624
30 Primitive et intégrale	631
Méthodes	645
Expéditions	650
31 Calcul intégral élémentaire	656
Méthodes	671
Expéditions	677
VIII Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$	683
32 Bases, dimension, rang — dans $\mathbb{R}^n$	684
Méthodes	696
Expéditions	701
33 Géométrie linéaire du plan et de l'espace	707
Méthodes	719

Expéditions	724
34 Développements limités et formules de Taylor	731
Méthodes	747
Expéditions	751
IX Polynômes et groupes	758
35 Polynômes	759
Méthodes	780
Expéditions	786
36 Groupes	793
Méthodes	813
Expéditions	818
X Algèbre linéaire approfondie	824
37 Espaces vectoriels et sous-espaces	825
Méthodes	837
Expéditions	842
38 Applications linéaires	848
Méthodes	862
Expéditions	867
39 Bases, dimension, rang — espaces vectoriels abstraits	874
Méthodes	885
Expéditions	890
40 Matrices et changement de base	896

Méthodes	910
Expéditions	915
41 Déterminants	921
Méthodes	936
Expéditions	942
42 Valeurs propres et réduction	949
Méthodes	971
Expéditions	977
XI Analyse en dimension supérieure	984
43 L'espace $\mathbb{R}^n$ comme cadre d'analyse	985
Méthodes	999
Expéditions	1004
44 Limites et continuité en plusieurs variables	1010
Méthodes	1025
Expéditions	1030
45 Dérivées partielles et différentielle	1036
Méthodes	1054
Expéditions	1060
46 Topologie d'entrée	1067
Méthodes	1085
Expéditions	1091
XII Séries et approximations	1098
47 Séries numériques	1099
Méthodes	1116

Expéditions	1121
48 Séries entières	1128
Méthodes	1143
Expéditions	1149
49 Suites et séries de fonctions	1156
Méthodes	1176
Expéditions	1182
 XIII Courbes et équations différentielles	 1189
50 Courbes paramétrées	1190
Méthodes	1203
Expéditions	1210
51 Équations différentielles	1218
Méthodes	1243
Expéditions	1250
 XIV Géométrie euclidienne	 1259
52 Produits scalaires et orthogonalité	1260
Méthodes	1273
Expéditions	1280
53 Espaces euclidiens	1290
Méthodes	1304
Expéditions	1310
54 Formes bilinéaires et quadratiques	1319
Méthodes	1333
Expéditions	1340

55	Géométrie affine et euclidienne	1350
Méthodes		1365
Expéditions		1372
 XV	 Combinatoire et probabilités	 1381
56	Combinatoire et dénombrement	1382
Méthodes		1399
Expéditions		1405
 57	 Probabilités : univers et événements	 1414
Méthodes		1427
Expéditions		1434
 58	 Variables aléatoires discrètes	 1444
Méthodes		1460
Expéditions		1467
 59	 Indépendance et modèles discrets	 1478
Méthodes		1494
Expéditions		1502
 XVI	 Intégration et calcul numérique	 1514
60	Intégrales multiples	1515
Méthodes		1531
Expéditions		1538
 61	 Analyse numérique élémentaire	 1550
Méthodes		1567
Expéditions		1576
 62	 Intégrales généralisées et à paramètre	 1588

Méthodes	1607
Expéditions	1614
Au terme de ce volume	1625
Bibliographie	1627
Index des notions	1632

DES ÉLÉMENTS À LA LICENCE

Il y a un moment, dans l'apprentissage des mathématiques, où les réponses cessent d'être le but et où les questions prennent leur place. Ce moment est celui que vous franchissez maintenant.

Au lycée, un théorème était un outil : on l'appliquait pour résoudre un exercice, puis on passait au suivant. En licence, un théorème devient un objet : on le démontre, on en cherche les limites, on se demande ce qui se passe quand on affaiblit ses hypothèses. La dérivée, que vous savez calculer, sera refondée sur la complétude des réels. Les vecteurs, que vous manipulez dans le plan, vivront dans des espaces de dimension quelconque. Le hasard, que vous saviez quantifier, reposera sur les axiomes de la mesure.

Ce n'est pas que les mathématiques deviennent plus difficiles. Elles deviennent plus profondes. Et la profondeur, une fois atteinte, simplifie tout : c'est en comprenant pourquoi un résultat est vrai que l'on cesse d'avoir besoin de le mémoriser.

La grammaire du réel, dont les Éléments ont posé les premiers mots, attend maintenant sa syntaxe.

Première partie

Apprendre à lire les mathématiques

La licence commence par la langue. Les énoncés et leur négation, les connecteurs d'implication et d'équivalence, les quantificateurs universel et existentiel fixent ce qu'une phrase mathématique affirme au juste; les ensembles, avec l'appartenance et l'inclusion, fournissent les objets; les applications les relient, avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. Ces conventions portent chaque définition et chaque démonstration du volume.

CHAPITRE I

CE QU'EST UN ÉNONCÉ MATHÉMATIQUE

Avant de calculer quoi que ce soit, il faut apprendre à dire quelque chose que l'on puisse juger vrai ou faux. Ce chapitre pose la première pierre : qu'est-ce qu'un énoncé mathématique, et en quoi diffère-t-il d'une phrase ordinaire? La langue courante tolère le flou, l'implicite, l'ambiguïté féconde; les mathématiques exigent que chaque mot soit tenu. En apprenant à formuler, puis à nier un énoncé, le lecteur découvre que la rigueur n'est pas un carcan : c'est la condition même pour que la pensée avance sans trébucher.

Articles de ce chapitre :

- 001.** *Quand la langue ordinaire ne suffit plus — La souplesse du langage courant devient dangereuse quand il faut raisonner avec précision.*
- 002.** *Dire quelque chose qu'on puisse juger — Les symboles viennent après; avant eux, il y a des énoncés : des phrases qu'on peut juger.*
- 003.** *Ce qui manque souvent à une phrase — Une phrase peut n'être ni absurde ni un énoncé : elle est simplement incomplète.*
- 004.** *Une vérité mathématique n'est pas une impression — « on voit bien que » n'a pas de valeur mathématique : il faut pouvoir démontrer.*
- 005.** *Énoncé faux ou expression mal définie — Toutes les difficultés ne sont pas au même niveau : faux $\neq$ mal défini.*
- 006.** *Les mathématiques commencent par des distinctions de langage — Aucun grand théorème n'a été démontré dans ce chapitre.*
- 007.** *Première opération sur un énoncé : la négation — On ne nie ni une consigne ni une expression mal définie : on nie une affirmation déterminée.*

I. QUAND LA LANGUE ORDINAIRE NE SUFFIT PLUS.

UN seul mot peut changer les nombres que l'on retient. On demande de retenir les entiers « divisibles par 2 ou par 3 ». Faut-il

retenir 6 ? Il est divisible par chacun des deux nombres. Tout dépend donc de ce que le mot « ou » autorise.

Si la consigne exige *au moins une des deux propriétés*, 6 convient : satisfaire les deux ne disqualifie pas. C'est le sens du « ou » inclusif, adopté en mathématiques sauf indication contraire.

Si elle exige *exactement une des deux propriétés*, 6 ne convient plus. Il faut alors écrire : « divisible par 2 ou par 3, mais pas par les deux ». C'est le « ou » exclusif.

Les nombres 2 et 3 conviennent dans les deux lectures ; le nombre 5 ne convient dans aucune. C'est 6 qui révèle la différence. Aucun calcul difficile n'était nécessaire : il fallait savoir quelle condition on demandait de satisfaire.

Dans la conversation, le contexte permet souvent de compléter ce qui n'est pas dit. En mathématiques, il peut fixer le domaine, les objets et les conventions ; il faut pouvoir les retrouver sans ambiguïté. Une phrase ne se lit pas isolément des hypothèses qui la gouvernent.

REMARQUE 1.1 : Les mathématiques ne demandent pas des mots plus nobles ni des phrases plus longues. Elles demandent des mots *tenus* : chaque terme doit garder le sens fixé dans le contexte où il apparaît. Elles n'exigent pas que tout soit compliqué. Elles exigent que les *distinctions* soient tenues : vrai ou faux, bien défini ou mal défini, démontré ou non démontré. Cela ne signifie pas que nous sachions décider la vérité de tout énoncé.

Le premier geste mathématique n'est donc pas de calculer. C'est de formuler quelque chose qu'on puisse juger, et c'est déjà un art. Dans les exercices qui suivent, les phrases sont lues sans valeur de variable déjà fixée, sauf indication contraire. Avoir une valeur de vérité ne signifie pas que nous sachions la déterminer.

Le premier exercice compare les deux lectures de « ou » sur une même liste d'entiers. Le second fait décider si une approximation verbale est suffisamment précise.

- Parmi les entiers de 1 à 12, reprenez ceux qui sont divisibles par 2 ou par 3. Donnez la liste (1) si au moins une des deux propriétés suffit; (2) si exactement une des deux est exigée. Quels nombres font la différence?

Solution : (1) Avec le « ou » inclusif, on retient 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12. (2) Avec le « ou » exclusif, on retient 2, 3, 4, 8, 9, 10. Les nombres 6 et 12 satisfont les deux propriétés : ils sont admis dans la première liste, exclus de la seconde. Les nombres 1, 5, 7, 11 n'en satisfont aucune et ne figurent dans aucune liste. En mathématiques, la première lecture est la convention usuelle; la seconde demande la précision « mais pas par les deux ».

- « Le nombre π est à peu près 3,14. » Est-ce un énoncé mathématique? Pourquoi?

Solution : Non. Un énoncé mathématique doit être vrai ou faux, sans flou. « À peu près » ne permet pas de trancher : tant qu'aucune convention ne fixe la précision visée, la phrase est insuffisamment définie, ni vraie ni fautive. On pourrait en revanche écrire : « $3,14 < \pi < 3,15$ » (vrai) ou « $\pi = 3,14$ » (faux). Les deux sont des énoncés; « à peu près » ne l'est pas. Les mathématiques exigent des mots *tenus*, pas des approximations verbales.

2. DIRE QUELQUE CHOSE QU'ON PUISSE JUGER.

AVANT les symboles, avant les formules, il y a un geste plus élémentaire : prononcer une phrase dont on puisse dire si elle est vraie ou fautive. Beaucoup d'étudiants croient que les mathématiques consistent surtout à manipuler des symboles. Les symboles viennent après. Avant eux, il y a des énoncés : des phrases qu'on peut juger.

Considérons cinq phrases :

$$2 + 3 = 5 \quad ; \quad 7 \text{ est premier} \quad ; \quad x + 1 > 0.$$

« Ferme la porte. » « Quel temps fera-t-il demain ? »

Les deux premières sont des énoncés mathématiques au sens le plus simple : chacune affirme quelque chose, et cette affirmation peut être jugée vraie ou fautive. La troisième ressemble à un énoncé, mais elle reste suspendue tant que l'on ne sait pas ce qu'est x . La quatrième est une consigne. La cinquième est une question. Ni l'une ni l'autre ne se prêtent au verdict vrai ou faux.

DÉFINITION 2.1 : Dans le cadre de la logique classique adopté ici, on appelle *proposition* ou *énoncé mathématique* une phrase affirmative qui, une fois son contexte et son interprétation fixés, possède une valeur de vérité : vraie ou fausse. Cette valeur peut nous être inconnue.

Un raisonnement mathématique ne travaille pas sur n'importe quelle phrase. Il travaille sur des énoncés. C'est à partir d'eux que l'on construit des preuves, que l'on tire des conséquences, que l'on identifie des erreurs. Les énoncés sont, en quelque sorte, la matière première du raisonnement.

REMARQUE 2.2 : Dans d'autres textes, on rencontre aussi le mot *assertion*. Dans ce volume, nous garderons surtout « énoncé », plus naturel en français, mais les trois termes désignent le même objet logique.

La définition est courte. Elle oblige pourtant à une grande discipline : une phrase vague n'est pas encore un énoncé, une phrase suggestive n'est pas encore un énoncé, une phrase incomplète n'est pas encore un énoncé. Reconnaître ce qui est un énoncé et ce qui ne l'est pas, c'est le premier pas vers le raisonnement, et peut-être le plus décisif. Dans la logique classique de ce volume, la bivalence fournit ainsi un premier appui au raisonnement ; elle ne se confond pas avec la capacité de trouver une preuve ou une réfutation.

Le premier exercice fait classer des phrases en énoncés et non-énoncés. Le second fait identifier la valeur de vérité d'un énoncé.

• *Classez chaque phrase : énoncé, question, consigne, ou phrase incomplète.*

(1) $3 + 4 = 8$. (2) Résoudre $x^2 = 4$. (3) Tout carré est positif. (4) n est pair. (5) Combien font 7×8 ?

Solution : (1) Énoncé (faux) : $3 + 4 = 8$. (2) Consigne (pas de verdict vrai/faux). (3) Énoncé (vrai) : $x^2 \geq 0$ pour tout réel x . (4) Phrase incomplète : on ne sait pas quel n . On peut fixer n , par exemple $n = 2$, ou quantifier : « $\forall n$ » ou « $\exists n$ ». (5) Question (pas de verdict). Seules (1) et (3) sont des énoncés.

la mathématique : affirmer l'existence d'un objet qui satisfait une condition, ou affirmer qu'elle vaut partout, sont deux gestes fondamentalement différents, et c'est leur distinction qui rend le raisonnement possible.

Nous reviendrons longuement sur ces deux tournures, que l'on appelle des *quantificateurs*. Pour l'instant, il suffit de retenir ceci : une phrase peut avoir tous les atours d'un énoncé mathématique et n'en être pas un. Ce qui lui manque, c'est le cadre qui fixe son sens : une valeur déjà fixée, ou une quantification sur un domaine précisé. Sans ce cadre, la phrase flotte entre le vrai et le faux sans se poser nulle part, et le raisonnement ne peut même pas commencer.

Le premier exercice fait compléter une phrase incomplète de deux manières opposées. Le second fait identifier ce qui manque à une phrase pour devenir un énoncé.

- La phrase « $x^2 > x$ » est incomplète. Complétez-la de deux façons pour obtenir un énoncé vrai et un énoncé faux.

Solution : « Il existe un réel x tel que $x^2 > x$ » (prendre $x = 2$: $4 > 2$). Faux : « Pour tout réel x , $x^2 > x$ » (prendre $x = 1/2$: $1/4 < 1/2$). La même expression donne un énoncé vrai ou faux selon le quantificateur choisi. C'est le cadre (pour tout / il existe) qui fixe le sens, pas l'expression elle-même.

- Que manque-t-il à chaque phrase pour devenir un énoncé ? (1) $2n + 1$ est impair. (2) f est croissante. (3) $A \cap B = \emptyset$.

Solution : (1) Sans contexte préalable, il faut fixer n ou le quantifier dans un domaine : « pour tout entier n , $2n + 1$ est impair » (vrai) ou « il existe un entier n tel que $2n + 1$ est impair » (vrai aussi, mais dit moins). (2) Il manque la fonction f : quelle fonction ? Et l'intervalle : sur quel domaine ? (3) Il manque la définition de A et B : quels ensembles ? Dans les trois cas, la phrase est grammaticalement correcte mais logiquement suspendue : elle ne dit rien que l'on puisse juger.

4. UNE VÉRITÉ MATHÉMATIQUE N'EST PAS UNE IMPRESSION.

ON dit volontiers « c'est évident », « on voit bien que », « cela doit être vrai ». Ces tournures ont parfois une utilité psychologique. Elles n'ont aucune valeur mathématique. Pourquoi ? Parce qu'en mathématiques, la conviction ne remplace pas la démonstration. Justifier un énoncé ne consiste pas à le trouver plausible. On peut

s'appuyer sur un résultat déjà établi, ou le démontrer à partir de définitions, d'hypothèses et de faits admis. La vérité dans une interprétation donnée et la démontrabilité dans un système fixé restent deux notions distinctes.

Il faut distinguer trois niveaux, que l'on a tendance à confondre : une phrase *plausible*, une phrase *vraie* et une phrase *démontrée*.

EXEMPLE : Tous les nombres impairs sont premiers.

Cet énoncé est parfaitement bien formé. On peut lui attribuer une valeur de vérité. Il est faux. Il suffit de considérer $9 = 3 \times 3$: c'est un nombre impair qui n'est pas premier. Ici, le verdict est rapide. Mais il a fallu exhiber un contre-exemple pour l'établir, non se fier à une impression.

EXEMPLE : La somme de deux nombres pairs est paire.

Cet énoncé est vrai. Mais pour entrer dans un raisonnement rigoureux, il faut encore savoir *pourquoi* il est vrai. Une démonstration élémentaire suffit : si $a = 2m$ et $b = 2n$, avec m, n entiers, alors

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n),$$

de sorte que $a + b$ est pair. Le passage de l'intuition à la preuve est comme le passage d'un croquis au dessin d'architecte : il ne s'agit pas de compliquer, mais de rendre visible la raison pour laquelle l'énoncé tient.

REMARQUE 4.1 : Une vérité mathématique ne suffit pas isolée. Pour servir de point d'appui à un raisonnement, elle doit prendre place dans un réseau de raisons : des définitions, des hypothèses, des étapes logiques. C'est ce réseau qui distingue une conviction d'une démonstration, et c'est en lui que réside toute la force opératoire des mathématiques.

Apprendre à démontrer, c'est donc apprendre à rendre compte de ses raisons, et cette exigence, loin de freiner la pensée, lui donne sa portée.

Le premier exercice fait distinguer impression et démonstration. Le second fait produire un contre-exemple pour réfuter un énoncé plausible.

- « *La somme de deux nombres impairs est impaire.* » *Vrai ou faux? Justifiez.*

Solution : Faux. $3 + 5 = 8$, qui est pair. Plus généralement : si $a = 2p + 1$ et $b = 2q + 1$, avec p, q entiers, alors $a + b = 2(p + q + 1)$, qui est pair. L'impression « impair + impair = impair » est naturelle mais fausse. La démonstration (deux lignes de calcul) tranche sans appel. C'est la différence entre une impression et une vérité mathématique.

- « *Si n est premier, alors $2^n - 1$ est premier.* » *Testez pour $n = 2, 3, 5, 7$. Puis essayez $n = 11$.*

Solution : $n = 2 : 3$ (premier), $n = 3 : 7$ (premier), $n = 5 : 31$ (premier), $n = 7 : 127$ (premier). Quatre succès de suite. Mais $n = 11 : 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, pas premier. L'impression « ça marche pour les premiers » était fausse. Un seul contre-exemple suffit pour réfuter un énoncé universel. Les nombres $2^n - 1$ (quand ils sont premiers) s'appellent nombres premiers de Mersenne; on ignore s'il en existe une infinité.

5. ÉNONCÉ FAUX OU EXPRESSION MAL DÉFINIE.

UNE phrase qui ne fonctionne pas peut échouer de deux manières très différentes. Confondre ces deux échecs, c'est se condamner à ne comprendre ni l'un ni l'autre. Un énoncé peut être faux : il affirme quelque chose de précis, mais cette affirmation est inexacte. Une expression peut aussi échouer en amont, avant même de produire un énoncé : elle prétend désigner un objet, mais cette désignation ne tient pas.

EXEMPLE : *Le plus grand nombre premier existe.*

Cette phrase est bien formée. Elle affirme quelque chose de clair : il existe un nombre premier qui est plus grand que tous les autres. C'est un énoncé. Il se trouve qu'il est faux, car on sait depuis Euclide qu'il y a une infinité de nombres premiers. Mais au moins, la phrase dit quelque chose que l'on peut juger.

CONTRE-EXEMPLE : *Le nombre réel le plus proche de zéro sans lui être égal.*

Ici, la situation est tout autre. Ce groupe de mots ne dit rien de vrai ni de faux. Il tente de désigner un objet, mais cette désignation

échoue : il n'existe pas de réel non nul dont la valeur absolue soit strictement inférieure à celle de tous les autres réels non nuls : aussi proche de zéro que l'on choisisse un réel $r \neq 0$, le réel $r/2$ (de même signe que r) est encore plus proche de zéro. L'expression ne parvient donc pas à fixer un objet. C'est un mirage verbal : la phrase semble pointer vers quelque chose, mais il n'y a rien au bout du doigt.

REMARQUE 5.1 : Il faut apprendre à reconnaître ces deux situations. Dans le premier cas, la phrase est un énoncé qui affirme quelque chose d'inexact. Dans le second, l'expression ne parvient même pas à poser correctement ce qu'elle prétend désigner. Une phrase nette peut être fausse. Une expression d'apparence raisonnable peut être mal définie. Savoir distinguer ces deux défaillances est l'une des premières compétences que le raisonnement mathématique exige, et l'une des moins enseignées.

Avant de juger si une phrase est vraie ou fausse, il faut d'abord vérifier qu'elle parvient à dire quelque chose, et c'est cette vigilance qui ouvre la voie aux définitions rigoureuses.

Le premier exercice fait distinguer « faux » et « mal défini ». Le second fait identifier une expression qui ne désigne rien.

- *Classez : faux ou mal défini ? (1) $\sqrt{2}$ est rationnel. (2) Le plus petit réel strictement positif. (3) $1 = 0$.*

Solution : (1) Énoncé faux : $\sqrt{2}$ est bien défini (c'est un nombre réel) et l'affirmation « $\sqrt{2}$ est rationnel » est fausse. (2) Mal défini : l'expression tente de désigner un objet qui n'existe pas (pour tout $r > 0$, $r/2$ est encore plus petit). Ce n'est ni vrai ni faux : c'est un mirage. (3) Énoncé faux : 1 et 0 sont bien définis, l'affirmation $1 = 0$ est simplement fausse. La distinction est capitale : (1) et (3) disent quelque chose de faux ; (2) ne parvient pas à dire quoi que ce soit.

- *« Le plus grand nombre premier. » Est-ce un objet bien défini ? Justifiez.*

Solution : Non. Il n'existe pas de plus grand nombre premier (théorème d'Euclide : pour toute liste finie de premiers, on peut en construire un diviseur premier qui n'y figure pas). L'expression a l'apparence d'un nom propre (elle semble pointer vers un objet précis) mais ne désigne rien. C'est une expression mal définie, pas un énoncé faux. L'énoncé « il existe un plus grand nombre premier » est, lui, un énoncé bien formé et faux.

6. LES MATHÉMATIQUES COMMENCENT PAR DES DISTINCTIONS DE LANGAGE.

AUCUN grand théorème n'a été démontré dans les articles qui précèdent. Aucune formule n'y a été établie pour elle-même : les rares calculs rencontrés ne servaient qu'à montrer ce qu'est une preuve. Et pourtant, quelque chose d'essentiel a été posé : les distinctions sans lesquelles aucun théorème ne peut être lu correctement.

Une proposition n'est pas une question. Un énoncé n'est pas une consigne. Une phrase complète n'est pas une phrase incomplète. Une vérité démontrée n'est pas une impression plausible. Un objet bien défini n'est pas une formule d'apparence raisonnable qui échoue à désigner quoi que ce soit.

REMARQUE 6.1 : Ces distinctions paraissent simples. Elles le sont dans leur formulation. Elles le sont beaucoup moins dans la pratique, car elles préfigurent un principe plus profond : en mathématiques, la première étape de toute construction est de fixer sans ambiguïté ce dont on parle. Définir un ensemble, énoncer un théorème, conduire une preuve, tout commence par une phrase dont le statut logique est clair. C'est exactement le travail que l'axiomatique reprendra à grande échelle : poser des règles de langage si précises que le raisonnement puisse avancer à partir d'un contexte explicite, sans dépendre d'une intuition tacite.

Les mathématiques ne sont pas exigeantes par goût de la complication. Elles sont exigeantes parce qu'elles refusent les glissements silencieux que la langue ordinaire tolère. Le travail de ces premiers articles était d'apprendre à remarquer ces glissements ; l'article suivant engage la première opération sur les énoncés, la négation. C'est un travail modeste en apparence, mais tout ce qui suit repose sur lui, comme un édifice repose sur ses fondations, invisibles mais porteuses.

L'article est une synthèse. L'exercice fait récapituler les distinctions du chapitre en classant une liste de phrases.

- Classez chaque phrase dans la bonne catégorie : énoncé vrai, énoncé faux, phrase incomplète, consigne, question, expression mal définie. (1) $2^{10} = 1024$. (2) Calculer $3!$. (3) $x > 5$. (4) Le réel dont le carré vaut -1 . (5) Tout nombre pair est divisible par 4. (6) Quelle est la valeur de π ?

Solution : (1) Énoncé vrai ($2^{10} = 1024$). (2) Consigne. (3) Phrase incomplète (quel x ?). (4) Expression mal définie (aucun réel n'a un carré négatif). (5) Énoncé faux (6 est pair mais pas divisible par 4). (6) Question. Ces six catégories couvrent les statuts distingués dans cette gamme.

7. PREMIÈRE OPÉRATION SUR UN ÉNONCÉ : LA NÉGATION.

AFFIRMER est un premier geste. Le second, tout aussi fondamental, est de contredire. Dès qu'un énoncé est bien formé, on peut lui appliquer une opération logique simple : le nier. Mais attention : on ne nie ni une consigne ni une expression mal définie. On nie une affirmation déterminée, et l'on obtient une nouvelle affirmation déterminée.

PROPOSITION 7.1 : La négation d'un énoncé mathématique est encore un énoncé mathématique.

PREUVE COMMENTÉE : Soit P un énoncé. Deux cas seulement sont possibles : P est vrai ou P est faux. Si P est vrai, alors « *non* P » est faux. Si P est faux, alors « *non* P » est vrai. Dans les deux cas, la phrase « *non* P » reçoit une valeur de vérité. C'est donc un énoncé.

Le principe est clair. Mais la mise en pratique réserve des surprises.

EXEMPLE : 2 est pair. Négation : 2 n'est pas pair.

Ici, la négation est immédiate : on remplace la propriété par son contraire.

EXEMPLE : Il existe un entier n tel que $n^2 = 9$. Négation : pour tout entier n , $n^2 \neq 9$.

Pour nier l'existence d'un objet satisfaisant une condition, on affirme qu'aucun objet ne la satisfait.

EXEMPLE : Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Négation : il existe un réel x tel que $x^2 < 0$.

La négation d'un « *pour tout* » devient un « *il existe* ». On ne nie pas cette phrase en écrivant « *pour tout réel x , $x^2 < 0$* » : ce serait affirmer que *tous* les carrés sont négatifs, ce qui est bien plus fort que la négation correcte.

Ce dernier exemple révèle un point essentiel : on ne nie pas un énoncé en y glissant simplement « *ne... pas* ». Il faut regarder la structure logique de la phrase. Quand un « *pour tout* » apparaît, la négation le transforme en « *il existe* », et réciproquement. La négation n'est pas un geste mécanique sur les mots ; c'est une opération sur la structure.

Pour des énoncés P, Q , avec le « ou » inclusif, cette lecture donne aussi les règles suivantes (les équivalences signifient que les deux côtés ont toujours la même valeur de vérité) :

$$\begin{aligned}\neg\neg P &\equiv P, \\ \neg(P \wedge Q) &\equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \\ \neg(P \vee Q) &\equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).\end{aligned}$$

La première se lit en niant deux fois. Pour les deux autres, dites lois de De Morgan, nier que les deux énoncés soient vrais signifie qu'au moins l'un est faux ; nier qu'au moins l'un soit vrai signifie que les deux sont faux. Leur traduction en ensembles sera reprise au chapitre 2.

REMARQUE 7.2 : L'échange entre « *pour tout* » et « *il existe* » sous l'effet de la négation est un premier exemple de dualité : deux notions que l'on croit distinctes se trouvent liées par une opération qui transforme l'une en l'autre. Cette symétrie réapparaîtra dans les lois de De Morgan (pour des ensembles, le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires, et réciproquement) et, bien plus loin, dans la dualité entre un espace et son dual. Reconnaître de telles symétries est l'un des fils conducteurs de toute la mathématique.

CONTRE-EXEMPLE : « Trouver un nombre premier plus grand que 10. »

Cette phrase n'est pas un énoncé : c'est une consigne. On ne peut pas en prendre la négation.

La négation est le premier outil que la logique offre pour transformer un énoncé, et apprendre à l'utiliser correctement, c'est déjà apprendre à raisonner.

Le premier exercice fait écrire la négation d'énoncés simples. Le second fait nier un énoncé avec quantificateur en inversant « pour tout » et « il existe ».

- Écrivez la négation de : (1) 5 est pair. (2) $\sqrt{9} = 3$. (3) Tout triangle a trois côtés.

Solution : (1) 5 n'est pas pair (ou : 5 est impair). Vrai. (2) $\sqrt{9} \neq 3$. Faux (car $\sqrt{9} = 3$ est vrai, donc sa négation est fautive). (3) Il existe un triangle qui n'a pas trois côtés. Faux (par définition, un triangle a trois côtés). Dans chaque cas, la négation est un nouvel énoncé, de valeur de vérité opposée à l'original.

- Écrivez la négation de : (1) Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$. (2) Il existe un entier n tel que $n^2 = 5$. (3) Pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Solution : (1) Il existe un réel x tel que $x^2 + 1 \leq 0$. Faux (car $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ toujours). (2) Pour tout entier n , $n^2 \neq 5$. Vrai ($\sqrt{5}$ n'est pas entier). (3) Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $2^n \leq n$. Faux (on peut le prouver par récurrence : $2 < 1$, puis $2^n > n + 1$ pour $n \geq 1$). Règle : « pour tout » devient « il existe » et la propriété se nie. « Il existe » devient « pour tout » et la propriété se nie.

MÉTHODES

Étude 1. ★ MÉTHODE : reconnaître un énoncé mathématique

Un énoncé est une phrase à laquelle on peut attribuer vrai ou faux. Ce n'est ni une question, ni une consigne, ni une phrase incomplète (variable ni fixée par le contexte ni quantifiée), ni une expression mal définie. Le premier réflexe face à une phrase : peut-on lui attribuer vrai ou faux ? Si oui, c'est un énoncé. Si non, identifier ce qui manque ou ce qui échoue.

Écrivez la négation de : (i) Pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$. (ii) Il existe un réel x tel que $\sin x = 2$. (iii) Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

(a) Identifiez la structure de chaque énoncé.

(b) Appliquez les règles de négation.

(c) Résumez.

Solution : (a) (i) « Pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$ » : c'est la définition de la convergence. (ii) « Il existe un réel x tel que $\sin x = 2$ » : c'est la définition de la vérité. (iii) « Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » : c'est la définition de la limite. (b) (i) « Pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$ » : faux (pour $n = 1$, les deux membres valent 1 ; pour $n \geq 2$, $n! > 2^{n-1}$). (ii) « Il existe un réel x tel que $\sin x = 2$ » : faux (car $|\sin x| \leq 1$). (iii) « Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » : vrai (car $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est au moins 2). (c) (i) « Pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$ » : faux (pour $n = 1$, les deux membres valent 1 ; pour $n \geq 2$, $n! > 2^{n-1}$). (ii) « Il existe un réel x tel que $\sin x = 2$ » : faux (car $|\sin x| \leq 1$). (iii) « Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » : vrai (car $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est au moins 2).

Étude 4. ★★ MÉTHODE : réfuter un énoncé par un contre-exemple

Pour montrer qu'un énoncé universel $(\forall x, P(x))$ est faux, un seul contre-exemple suffit : exhiber un x_0 tel que $P(x_0)$ est faux. Un contre-exemple ne prouve pas que P est « toujours faux » ; il prouve que P n'est pas « toujours vrai ». C'est la négation exacte de $\forall x, P(x)$.

Réfutez chaque énoncé par un contre-exemple. (i) Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n - 1$ est premier. (ii) Pour tous réels x, y , $|x + y| = |x| + |y|$. (iii) Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est dérivable.

(a) Trouvez un contre-exemple pour chaque énoncé.

(b) Vérifiez que le contre-exemple satisfait les hypothèses mais pas la conclusion.

(c) Résumez.

Solution : (a) (i) « Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n - 1$ est premier » : faux (pour $n = 3$, $2^3 - 1 = 7$ est premier ; pour $n = 4$, $2^4 - 1 = 15$ n'est pas premier). (ii) « Pour tous réels x, y , $|x + y| = |x| + |y|$ » : faux (pour $x = 1$, $y = -1$, $|1 + (-1)| = 0$ mais $|1| + |-1| = 2$). (iii) « Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est dérivable » : faux (la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0). (b) (i) « Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n - 1$ est premier » : faux (pour $n = 3$, $2^3 - 1 = 7$ est premier ; pour $n = 4$, $2^4 - 1 = 15$ n'est pas premier). (ii) « Pour tous réels x, y , $|x + y| = |x| + |y|$ » : faux (pour $x = 1$, $y = -1$, $|1 + (-1)| = 0$ mais $|1| + |-1| = 2$). (iii) « Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est dérivable » : faux (la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0). (c) (i) « Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n - 1$ est premier » : faux (pour $n = 3$, $2^3 - 1 = 7$ est premier ; pour $n = 4$, $2^4 - 1 = 15$ n'est pas premier). (ii) « Pour tous réels x, y , $|x + y| = |x| + |y|$ » : faux (pour $x = 1$, $y = -1$, $|1 + (-1)| = 0$ mais $|1| + |-1| = 2$). (iii) « Toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue est dérivable » : faux (la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0).

Étude 5. ★★ MÉTHODE : compléter une phrase en énoncé

Une phrase contenant une variable (x , n , f , etc.) qui n'est ni fixée par le contexte ni quantifiée reste ouverte. Pour la compléter, on peut fixer sa valeur ou : (1) ajouter un quantificateur ($\forall$ ou $\exists$); (2) préciser le domaine de la variable (entier, réel, fonction, etc.). Le choix du quantificateur change le sens : $\forall$ universalise, $\exists$ localise. Le même prédicat peut donner un énoncé vrai ou faux selon le quantificateur.

Complétez « $n^2 - 4n + 3 = 0$ » de quatre manières : un énoncé vrai avec $\exists$, un énoncé faux avec $\exists$, un énoncé vrai avec $\forall$, un énoncé faux avec $\forall$.

(a) Trouvez les racines de $n^2 - 4n + 3 = 0$.

(b) Construisez les quatre énoncés.

(c) Résumez.

Solution 5 : (a) $n^2 - 4n + 3 = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n-3) = 0$, racines $n = 1$ et $n = 3$. (b) Vrai avec $\exists$: « Il existe un entier n tel que $n^2 - 4n + 3 = 0$ » (prendre $n = 1$). Faux avec $\forall$: « Il existe un réel $n > 10$ tel que $n^2 - 4n + 3 = 0$ » (les racines sont 1 et 3, toutes ≤ 10). Vrai avec $\forall$: aucun domaine étendu ne convient, mais on peut restreindre le domaine aux racines : « Pour tout $n \in \{1, 3\}$, $n^2 - 4n + 3 = 0$ » (vrai). Faux avec $\forall$: « Pour tout entier n , $n^2 - 4n + 3 = 0$ » (faux). (c) Le quantificateur et le domaine fixent le sens; la même expression peut être vraie ou fausse.

Étude 6. ★★ MÉTHODE : analyser la structure logique d'une définition

Une définition mathématique fixe le sens d'un terme de manière univoque. Pour vérifier qu'une définition est correcte : (1) chaque mot est-il tenu (sens unique)? (2) chaque variable est-elle quantifiée ou fixée? (3) Si la définition prétend nommer un objet précis (« le X tel que... »), cet objet existe-t-il? (4) Est-il unique? (Une définition de prédicat ou d'ensemble, elle, reste correcte même sans instance : l'ensemble vide est un ensemble bien défini.) Une définition n'est ni vraie ni fausse : elle est bien formée ou mal formée.

Analysez la définition : « Un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2 dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même. »

(a) La définition est-elle bien formée? Chaque terme est-il tenu?

(b) Vérifiez sur des exemples : 7, 9, 1, 2.

(c) Pourquoi 1 est-il exclu? Que se passerait-il si on l'incluait?

Solution 6 : (a) Bien formée : « entier » (terme tenu), « supérieur ou égal à 2 » (condition claire), « les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même » (critère décidable). (b) 7 : diviseurs 1, 7. Premier, 9 : diviseurs 1, 3, 9. Pas premier, 1 : diviseurs {1} seulement. Exclu par la condition > 2 . 2 : diviseurs 1, 2. Premier (le seul premier pair). (c) Si on incluait 1, le théorème fondamental de l'arithmétique (décomposition unique en facteurs premiers) serait faux : $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2 = 1 \times 2 \times 3$, etc. L'exclusion de 1 n'est pas un caprice : c'est une condition nécessaire pour que la factorisation soit unique.

RÉCAPITULATIF DES MÉTHODES

RECONNAÎTRE UN ÉNONCÉ : *Peut-on dire vrai ou faux? Si oui, énoncé. Sinon : question, consigne, déclaration, phrase incomplète, ou expression mal définie.*

FAUX VS MAL DÉFINI : *Faux = affirme quelque chose d'inexact. Mal défini = ne parvient pas à désigner un objet. Vérifier les termes avant de juger.*

NÉGATION : $\forall \leftrightarrow \exists$, puis nier la propriété. Ne pas glisser « ne... pas » mécaniquement.

CONTRE-EXEMPLE : *Un seul suffit pour réfuter $\forall x, P(x)$. Mille exemples ne prouvent pas $\forall$ sans couvrir tout le domaine.*

COMPLÉTER EN ÉNONCÉ : *Variable non fixée $\rightarrow$ fixer sa valeur, ou ajouter quantificateur + domaine. Le choix peut changer le verdict.*

DÉFINITION : *Chaque mot tenu, chaque variable fixée; si un objet précis est nommé, il doit exister (et être unique si requis).*

EXPÉDITIONS

EXPÉDITION 1 : LE PARADOXE DU BARBIER

Prérequis : études 2, 6.

Dans un village, un barbier, lui-même habitant du village, rase exactement les habitants qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier se rase-t-il lui-même?

- (a) Supposons que le barbier se rase lui-même. Que dit la règle?
 (b) Supposons qu'il ne se rase pas lui-même. Que dit la règle?
 (c) Les deux hypothèses mènent à une contradiction. Conclusion?

Indication : Si le barbier se rase, il fait partie de ceux qui se rasent eux-mêmes, donc le barbier ne devrait pas le raser (contradiction).
 Si le barbier ne se rase pas, il fait partie de ceux que le barbier doit raser, donc il devrait se raser (contradiction).

- (d) Comparez avec l'expression « l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes ». C'est le paradoxe de Russell (1901).
 (e) Que nous apprend ce paradoxe sur les définitions?

Le paradoxe du barbier est la version populaire du paradoxe de Russell : l'ensemble $R = \{x : x \notin x\}$ ne peut exister sans contradiction ($R \in R \Leftrightarrow R \notin R$). Ce paradoxe a provoqué une crise des fondements au début du XX^e siècle et conduit à l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, qui restreint la formation des ensembles : on ne forme plus librement $\{x : P(x)\}$, le schéma de séparation permet de sélectionner les éléments vérifiant P à l'intérieur d'un ensemble déjà donné. D'autres axiomes autorisent d'autres constructions. La leçon pour ce chapitre : une expression d'apparence raisonnable peut être mal définie. Le langage ordinaire permet de formuler des phrases qui semblent sensées mais qui contiennent une autoréférence destructrice. Les mathématiques interdisent cette autoréférence non contrôlée, celle qui engendre une contradiction sans qu'aucune règle ne vienne l'encadrer, et c'est cette discipline qui évite ce type précis de contradiction. (Une autoréférence soigneusement encadrée, elle, peut être féconde : le théorème de Gödel, plus loin dans ce chapitre, en donnera un exemple central.)

Compte rendu : (a) S'il se rase, il est parmi ceux qui se rasent eux-mêmes, mais le barbier ne rase que ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes : contradiction. (b) S'il ne se rase pas, il est parmi ceux que le barbier doit raser, donc il doit se raser : contradiction. (c) Distinguons deux lectures. L'énoncé « il existe un tel barbier » est simplement faux : aucun individu ne peut satisfaire la règle, qui lui imposerait à la fois de se raser et de ne pas se raser (le prédicat lui, est bien formé mais sans instances, comme l'autoréférence étudiée 6). La description « le barbier qui rase exactement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes », elle, échoue à désigner un objet : comme « le plus petit élément de $[0, 1]$ » (étude 2), elle est mal définie. Ce n'est pas un paradoxe du monde réel mais du langage : la phrase semble bien formée mais contient une autoréférence circulaire. (d) Si un ensemble universel U existait dans ce cadre, la séparation donnerait $R = \{x \in U : x \notin x\}$. Comme $R \in U$, on aurait : $R \in R \Rightarrow R \notin R$ et $R \notin R \Rightarrow R \in R$. Même structure. (e) Toute définition doit être vérifiée : désigne-t-elle un objet qui existe sans contradiction ? Le paradoxe montre qu'une phrase grammaticalement correcte peut être logiquement impossible.

EXPÉDITION 2 : QUARANTE EXEMPLES NE FONT PAS UNE PREUVE*Prérequis : études 4.*

Le polynôme $P(n) = n^2 + n + 41$ produit des nombres premiers pour $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. Est-ce une preuve que $P(n)$ est toujours premier?

(a) Vérifiez que $P(0) = 41$, $P(1) = 43$, $P(2) = 47$, $P(3) = 53$ sont tous premiers.

(b) Calculez $P(40)$. Factorisez.

Indication : $P(40) = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

(c) Pourquoi $P(40)$ devait-il être composé? Calculez $P(41)$.

Indication : $P(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \times 41 = 41(41 + 2) = 41 \times 43$.

(d) Que prouve cet exemple sur la relation entre vérification expérimentale et preuve?

(e) Connaît-on un polynôme qui ne produit que des premiers pour tout entier naturel n ?

Le polynôme d'Euler $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, \dots, 39$ (quarante valeurs consécutives), mais $P(40) = 41^2$ est composé. C'est l'un des exemples les plus frappants de la distinction entre vérification et preuve : quarante confirmations ne valent pas une démonstration, et un seul échec suffit à réfuter. En fait, aucun polynôme non constant à coefficients entiers ne peut produire uniquement des nombres premiers lorsque n parcourt $\mathbb{N}$: si $P(a) = p$ est premier, alors $P(a + kp)$ est divisible par p pour tout entier $k \geq 0$; or P n'étant pas constant, $|P(a + kp)|$ finit par dépasser p quand $k \rightarrow +\infty$, ce qui interdit à $P(a + kp)$ d'être premier au-delà d'un certain rang (divisible par p et de valeur absolue plus grande que p). La leçon est profonde : l'induction empirique (observer des cas et généraliser) n'est pas une preuve. Elle ne doit pas être confondue avec la récurrence mathématique, qui est une méthode déductive. Seule la déduction (enchaîner des implications depuis des hypothèses) en est une.

Compte rendu 2 : (a) $P(0) = 41$ (premier), $P(1) = 43$ (premier), $P(2) = 47$ (premier), $P(3) = 53$ (premier). La suite se poursuit : toutes les valeurs sont premières jusqu'à $P(39) = 1601$. (b) $P(40) = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$. Composé. (c) $P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41^2$. Er $P(41) = 41^2 + 41 + 42 = 41 \times 43$. Le 41 dans le polynôme garantit la divisibilité. (d) 40 exemples favorables ne prouvent pas l'énoncé universel. Un seul contre-exemple le réfute. L'induction empirique n'est pas une preuve mathématique. (e) Pas de manière intéressante : un polynôme constant $P(n) = p$, avec p premier, convient trivialement, mais aucun polynôme non constant à coefficients entiers ne produit que des premiers lorsque n parcourt $\mathbb{N}$. La preuve est élémentaire : si $P(a) = p$ (premier), alors $P(a+p), P(a+2p), \dots$ sont tous divisibles par p , et P n'étant pas constant, finissent par dépasser p en valeur absolue : divisibles par p et de valeur absolue plus grande que p , ils ne sont plus premiers au-delà d'un certain rang.

EXPÉDITION 3 : LA PHRASE QUI PARLE D'ELLE-MÊME

Prérequis : études 1, 2.

« Cette phrase est fausse. » Vrai ou faux?

(a) Si la phrase est vraie, que dit-elle d'elle-même?

(b) Si la phrase est fausse, que dit-elle d'elle-même?

(c) Pourquoi ne peut-on pas lui attribuer vrai ou faux? Quelle catégorie du chapitre cette phrase viole-t-elle?

Indication : La phrase n'est pas un énoncé mathématique : elle ne satisfait pas la définition (on ne peut pas lui attribuer vrai ou faux sans contradiction).

(d) Comparez avec « $2 + 2 = 5$ » (faux mais pas paradoxal) et avec « $x > 3$ » (incomplet mais pas paradoxal). Le paradoxe du menteur est d'une nature différente : pourquoi?

(e) Gödel (1931) a construit un énoncé arithmétique qui « dit » de lui-même qu'il est indémontrable dans un système formel donné. Cet énoncé est-il un paradoxe?

« Cette phrase est fausse » est le paradoxe du menteur, connu depuis l'Antiquité (Eubulide de Milet, IV^e siècle av. J.-C.). Dans une lecture classique qui identifie la vérité de la phrase à ce qu'elle affirme, aucune attribution cohérente de vrai ou faux n'est possible : lui attribuer l'un entraîne l'autre. Ce n'est donc pas un énoncé au sens de l'article 2. La difficulté vient ici de l'autoréférence appliquée à sa propre fausseté, et non de toute autoréférence. En 1931, Gödel a transformé cette idée en un théorème rigoureux, que nous admettons ici (sa preuve relève de la logique mathématique) : dans tout système formel cohérent, dont les démonstrations peuvent être vérifiées mécaniquement, et assez riche pour contenir l'arithmétique, il existe des énoncés vrais dans le modèle standard des entiers mais indémontrables dans le système. Cela précise la distinction de l'article 4 : être vrai dans une

interprétation n'est pas être démontrable dans un système fixé. La vérité de l'énoncé de Gödel s'établit ici par un raisonnement extérieur au système étudié, sous l'hypothèse de sa cohérence; elle n'est pas une preuve produite par ce système. L'énoncé de Gödel n'est pas un paradoxe (il est vrai, pas contradictoire); il montre que la vérité mathématique dépasse ce qu'un système formel donné peut démontrer. Le chapitre 1 de ce volume posait la question : qu'est-ce qu'un énoncé? Gödel montre que cette question est plus profonde qu'il n'y paraît.

Compte rendu 3 : (a) Si « cette phrase est fausse » est vraie, alors ce qu'elle dit est correct : elle est fausse. Contradiction. (b) Si elle est fausse, alors ce qu'elle dit est incorrect : elle n'est pas fausse, donc elle est vraie. Contradiction. (c) Dans cette lecture classique, on ne peut lui attribuer de façon cohérente vrai ou faux : elle viole la définition d'énoncé (article 2). Ce n'est pas un énoncé mathématique. La source : une autoréférence non contrôlée, qui engendre directement une contradiction. (d) L'énoncé de Gödel n'est pas un paradoxe : il est vrai (dans le modèle standard) mais indémontrable dans le système. C'est un théorème sur les limites de la preuve formelle, pas une contradiction. Il montre que « vrai » et « démontrable » ne coïncident pas toujours.

LECTURES COMPLÉMENTAIRES

- **Cori, R. & Lascar, D.** (1993, Masson; rééd. 2003, Dunod), Logique mathématique, vol. I. Cours français de référence.
- **Halmos, P.R.** (1960), Naive Set Theory, Van Nostrand (réédition Springer, 1974). Introduction lumineuse, célèbre pour sa clarté.
- **Velleman, D.J.** (2006, 2^e éd.), How to Prove It : A Structured Approach, Cambridge. Manuel pédagogique remarquable.
- **Hauchecorne, B.** (1988, 2^e éd. 2007), Les contre-exemples en mathématiques, Ellipses. Pour calibrer son intuition.