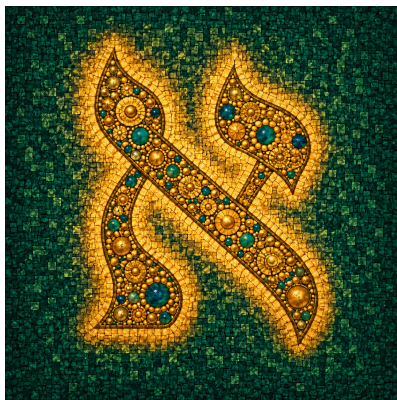




# Cours articulé de mathématiques

I

## Éléments DU NOMBRE À LA FORME

**William de France**

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

*Clem*



# ÉLÉMENTS

*Dieu a fait les nombres entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme.*

LEOPOLD KRONECKER, RAPPORTÉ PAR H. WEBER (1893)

# Cours articulé de mathématiques

I

## Éléments

DU NOMBRE À LA FORME

**William de France**

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Copyright © 2026 William de France

ÉDITIONS CLEMENTINIUM

Collection COURS ARTICULÉ DE MATHÉMATIQUES

Tous droits réservés.

## AVANT-PROPOS

Ce livre est une invitation. Il s'adresse à l'élève qui entre dans les mathématiques formelles (peut-être avec curiosité, peut-être avec appréhension) et qui découvre que derrière les calculs du collège se cache une architecture. L'objectif n'est pas de tout savoir à la fin de la lecture, mais de commencer à voir : voir que  $2 + 3 \times 4$  n'est pas une suite de gestes arbitraires mais une hiérarchie, que le théorème de Pythagore relie la forme au nombre, que la chaîne  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  raconte une histoire d'élargissements successifs, chaque étape motivée par une équation qui refusait de se résoudre dans le cadre précédent.

Ce premier volume enseigne les premiers mots de la langue mathématique : nombre, distance, angle, équation, fonction, symétrie. Il conduit de l'arithmétique de l'école au seuil des mathématiques universitaires. Il couvre l'essentiel du programme de l'enseignement secondaire, et y ajoute, lorsqu'ils éclairent les idées fondamentales, quelques aperçus du programme supérieur. Il est réparti en sept parties : langage, calcul et démonstration ; géométrie du plan ; géométrie de l'espace ; nombres complexes ; fonctions, suites et analyse ; probabilités et statistique ; coniques. Il ne présuppose aucune connaissance préalable au-delà de l'arithmétique élémentaire. Il prépare le lecteur au volume suivant, *Licence*, qui construit les fondements des mathématiques universitaires.

Les notations employées sont les notations standard de la tradition française :  $\mathbb{N}$  pour les entiers naturels,  $\mathbb{R}$  pour les réels,  $f: A \rightarrow B$  pour une application, et ainsi de suite. Lorsqu'une notation est introduite pour la première fois, elle est définie dans le corps de l'article qui l'emploie.

Que le lecteur ne s'inquiète pas de ne pas tout comprendre du premier coup. Les mathématiques se lisent lentement, crayon en main, et il est normal de revenir sur un passage, de refaire un calcul, de laisser une idée mûrir avant d'y revenir. Ce livre n'est pas un examen : c'est un compagnon de route. Qu'il ouvre la voie vers la beauté austère et lumineuse des structures mathématiques.

## AU LECTEUR

Ce cours articule en cinq volumes la grammaire par laquelle la réalité se compose elle-même : plus de mille cinq cents articles de mathématiques, du premier nombre entier à la correspondance de Langlands et de la brachistochrone à l'amplituèdre. L'entreprise est vaste. L'auteur ne prétend pas qu'elle soit sans défauts ; il affirme qu'elle est sincère.

Chaque article développe une seule idée, de sa motivation à son interprétation. Les définitions sont encadrées. Les résultats (propositions, théorèmes) sont signalés par leur étiquette en gras ; dans les volumes II et III, les théorèmes majeurs sont en outre encadrés en rouge. Les preuves sont présentes là où elles éclairent, esquissées là où la rigueur complète aurait obscurci le propos, et admises lorsque leur difficulté excède le cadre de l'article. Le lecteur saura distinguer les trois cas.

Dix objets mathématiques traversent la collection comme des fils rouges : le cercle  $S^1$ , les entiers  $\mathbb{Z}$ , l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , la courbe elliptique  $y^2 = x^3 - x$ , le groupe  $GL_2$ , la fonction  $\zeta(s)$ , l'espace  $L^2$ , l'anneau  $K[X]$ , le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ , et le tore  $T^2$ . Du calcul trigonométrique au groupe dual de Langlands, de l'oscillateur harmonique à la dualité de Montonen-Olive, chacun de ces objets réapparaît à chaque cycle avec une profondeur nouvelle. Quand l'un se manifeste, le texte le signale.

Les figures, plus de huit cents au total, ont été dessinées avec le soin qu'exige un format de poche : chaque trait a une raison d'être, chaque label est dégagé de toute courbe, et la palette se limite à quatre couleurs. Elles ne remplacent pas la démonstration ; elles la précèdent. Le lecteur qui regarde la figure avant de lire le théorème comprendra souvent l'énoncé avant d'en avoir lu un mot.

Dans les volumes I à III, les chapitres de cours se prolongent par des exercices gradués (gammes, études-méthodes, expéditions) dont les solutions détaillées sont imprimées à l'envers au pied de chaque exercice : on peut chercher sans voir la réponse, puis la lire en retournant le livre. Le lecteur qui s'y engage trouvera un pédagogue, jamais un examinateur.

Le lecteur peut suivre le chemin linéaire ou emprunter les passages transversaux entre volumes. Les volumes I à III forment une progression continue du lycée au niveau master. Le volume IV s'élève vers le programme de Langlands ; le volume V, vers la physique mathématique. Tous deux supposent le volume III mais peuvent se lire indépendamment l'un de l'autre.

Toute erreur signalée est une erreur corrigée.

wdf@clementinium.com

## NOTE SUR LES CYCLES

Les cinq volumes de la collection accompagnent une progression, des premiers objets mathématiques aux questions de recherche :

- *Éléments* (I) : les mathématiques de l'enseignement secondaire, de l'arithmétique aux premières preuves.
- *Licence* (II) : les fondements des études universitaires de mathématiques.
- *Maîtrise* (III) : les approfondissements et la préparation à la recherche.
- *Correspondances* (IV) : le cycle de recherche, de la théorie du corps de classes au programme de Langlands.
- *Physique mathématique* (V) : le cycle de recherche, des symétries aux cordes.

Ces niveaux orientent la lecture sans imposer un calendrier universitaire. Les parties et les chapitres donnent les étapes du parcours ; le rythme dépend des acquis du lecteur et des questions qu'il souhaite approfondir. Les volumes I, II et III construisent successivement les prérequis qui permettent d'aborder le suivant. Le lecteur peut entrer directement au niveau dont il possède les acquis. Les volumes IV et V partagent le socle de la *Maîtrise* et peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. Les passerelles en début de volume précisent le changement de perspective.

# NOTATIONS

|                      |                                                |
|----------------------|------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$         | <i>entiers naturels</i>                        |
| $\mathbb{Z}$         | <i>entiers relatifs</i>                        |
| $\mathbb{Q}$         | <i>nombres rationnels</i>                      |
| $\mathbb{R}$         | <i>nombres réels</i>                           |
| $\mathbb{C}$         | <i>nombres complexes</i>                       |
| $\in$                | <i>appartient à</i>                            |
| $\subset, \subseteq$ | <i>inclus dans (égalité permise)</i>           |
| $\cup$               | <i>réunion</i>                                 |
| $\cap$               | <i>intersection</i>                            |
| $\emptyset$          | <i>ensemble vide</i>                           |
| $\mathcal{P}(E)$     | <i>ensemble des parties de E</i>               |
| $\forall$            | <i>pour tout</i>                               |
| $\exists$            | <i>il existe</i>                               |
| $\Rightarrow$        | <i>implique</i>                                |
| $\Leftrightarrow$    | <i>équivalent à</i>                            |
| $ x $                | <i>valeur absolue de x</i>                     |
| $\sqrt{x}$           | <i>racine carrée de x</i>                      |
| $[a, b], ]a, b[$     | <i>intervalle fermé, intervalle ouvert</i>     |
| $\leq, \geq$         | <i>inférieur ou égal, supérieur ou égal</i>    |
| $\neq$               | <i>différent de</i>                            |
| $\approx$            | <i>environ égal à (valeur approchée)</i>       |
| $\pi$                | <i>rapport de la circonférence au diamètre</i> |
| $\infty$             | <i>infini</i>                                  |
| $\sin, \cos, \tan$   | <i>fonctions trigonométriques</i>              |
| $f'(x)$              | <i>dérivée de f en x</i>                       |
| $\int_a^b f(x) dx$   | <i>intégrale de f de a à b</i>                 |
| $\sum_{k=0}^n$       | <i>somme pour k de 0 à n</i>                   |
| $n!$                 | <i>factorielle de n</i>                        |
| $\binom{n}{k}$       | <i>coefficient binomial</i>                    |
| $i$                  | <i>unité imaginaire, <math>i^2 = -1</math></i> |
| $\bar{z}$            | <i>conjugué du complexe z</i>                  |
| $ z $                | <i>module du complexe z</i>                    |

|                                              |                                                                            |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\arg(z)$                                    | <i>argument du complexe <math>z</math></i>                                 |
| $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ | <i>partie réelle, partie imaginaire</i>                                    |
| $u_n$                                        | <i>terme général d'une suite</i>                                           |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$           | <i>limite d'une suite</i>                                                  |
| $\rightarrow$                                | <i>tend vers</i>                                                           |
| $\vec{u}$                                    | <i>vecteur <math>u</math></i>                                              |
| $\ \vec{u}\ $                                | <i>norme du vecteur <math>\vec{u}</math></i>                               |
| $\vec{u} \cdot \vec{v}$                      | <i>produit scalaire de <math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math></i>    |
| $\vec{u} \wedge \vec{v}$                     | <i>produit vectoriel de <math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math></i>   |
| $\det(\vec{u}, \vec{v})$                     | <i>déterminant de deux vecteurs</i>                                        |
| $e$                                          | <i>nombre d'Euler (<math>e \approx 2,718</math>)</i>                       |
| $\ln x$                                      | <i>logarithme népérien de <math>x</math></i>                               |
| $e^x, \exp(x)$                               | <i>exponentielle de <math>x</math></i>                                     |
| $a \mid b$                                   | <i><math>a</math> divise <math>b</math></i>                                |
| $a \equiv b \pmod{n}$                        | <i><math>a</math> et <math>b</math> sont congrus modulo <math>n</math></i> |
| $\operatorname{PGCD}(a, b)$                  | <i>plus grand commun diviseur</i>                                          |
| $\operatorname{PPCM}(a, b)$                  | <i>plus petit commun multiple</i>                                          |
| $P(A)$                                       | <i>probabilité de l'événement <math>A</math></i>                           |
| $P(A \mid B)$                                | <i>probabilité de <math>A</math> sachant <math>B</math></i>                |
| $E(X)$                                       | <i>espérance de la variable aléatoire <math>X</math></i>                   |
| $V(X)$                                       | <i>variance de la variable aléatoire <math>X</math></i>                    |

# Table des matières

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| Avant-propos                                             | v         |
| Au lecteur                                               | vi        |
| Note sur les cycles                                      | viii      |
| Notations                                                | ix        |
| <b>I Langage, calcul et démonstration</b>                | <b>I</b>  |
| <b>1 Calcul numérique et littéral</b>                    | <b>2</b>  |
| Méthodes . . . . .                                       | 25        |
| Expéditions . . . . .                                    | 30        |
| <b>2 Ordre, valeur absolue, équations et inéquations</b> | <b>34</b> |
| Méthodes . . . . .                                       | 56        |
| Expéditions . . . . .                                    | 61        |
| <b>3 Démontrer et raisonner</b>                          | <b>65</b> |
| Méthodes . . . . .                                       | 86        |
| Expéditions . . . . .                                    | 91        |
| <b>4 Arithmétique élémentaire</b>                        | <b>95</b> |

|                                                  |            |
|--------------------------------------------------|------------|
| Méthodes . . . . .                               | 113        |
| Expéditions . . . . .                            | 119        |
| <b>5 Second degré</b>                            | <b>122</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 139        |
| Expéditions . . . . .                            | 144        |
| <b>II Géométrie du plan</b>                      | <b>148</b> |
| <b>6 Figures fondamentales du plan</b>           | <b>149</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 170        |
| Expéditions . . . . .                            | 174        |
| <b>7 Repère et géométrie cartésienne du plan</b> | <b>178</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 193        |
| Expéditions . . . . .                            | 198        |
| <b>8 Vecteurs et géométrie vectorielle</b>       | <b>202</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 225        |
| Expéditions . . . . .                            | 229        |
| <b>9 Transformations du plan</b>                 | <b>233</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 258        |
| Expéditions . . . . .                            | 263        |
| <b>10 Produit scalaire et trigonométrie</b>      | <b>267</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 302        |
| Expéditions . . . . .                            | 306        |
| <b>III Géométrie de l'espace</b>                 | <b>310</b> |
| <b>11 Géométrie de l'espace</b>                  | <b>311</b> |
| Méthodes . . . . .                               | 342        |

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| Expéditions . . . . .                             | 346        |
| <b>IV Nombres complexes</b>                       | <b>350</b> |
| <b>12 Nombres complexes</b>                       | <b>351</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 379        |
| Expéditions . . . . .                             | 383        |
| <b>13 Complexes et géométrie</b>                  | <b>387</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 405        |
| Expéditions . . . . .                             | 409        |
| <b>V Fonctions, suites et analyse</b>             | <b>414</b> |
| <b>14 Fonctions et courbes</b>                    | <b>415</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 444        |
| Expéditions . . . . .                             | 447        |
| <b>15 Suites et récurrence</b>                    | <b>452</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 474        |
| Expéditions . . . . .                             | 478        |
| <b>16 Limites et continuité</b>                   | <b>483</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 506        |
| Expéditions . . . . .                             | 510        |
| <b>17 Dérivation et étude des fonctions</b>       | <b>514</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 540        |
| Expéditions . . . . .                             | 544        |
| <b>18 Logarithme, exponentielle et puissances</b> | <b>548</b> |
| Méthodes . . . . .                                | 566        |
| Expéditions . . . . .                             | 569        |

|            |                                                   |            |
|------------|---------------------------------------------------|------------|
| 19         | Primitive, intégrale et équations différentielles | 574        |
|            | Méthodes . . . . .                                | 602        |
|            | Expéditions . . . . .                             | 605        |
| <b>VI</b>  | <b>Probabilités et statistique</b>                | <b>610</b> |
| 20         | Dénombrement et probabilités                      | 611        |
|            | Méthodes . . . . .                                | 633        |
|            | Expéditions . . . . .                             | 637        |
| 21         | Variables aléatoires et statistique               | 641        |
|            | Méthodes . . . . .                                | 656        |
|            | Expéditions . . . . .                             | 660        |
| <b>VII</b> | <b>Coniques</b>                                   | <b>665</b> |
| 22         | Coniques                                          | 666        |
|            | Méthodes . . . . .                                | 688        |
|            | Expéditions . . . . .                             | 692        |
|            | Au terme de ce volume                             | 697        |
|            | Bibliographie                                     | 698        |
|            | Index des notions                                 | 700        |

# Première partie

## Langage, calcul et démonstration

*Le calcul vient d'abord : écritures numériques et littérales, ordre et valeur absolue, équations et inéquations. On apprend ensuite à démontrer, avec les ensembles, les quantificateurs et les principaux modes de raisonnement. L'arithmétique des entiers suit, de la division euclidienne aux nombres premiers et aux congruences. L'étude du trinôme  $ax^2 + bx + c$ , de son discriminant et de sa forme canonique ouvre les premières questions d'optimisation.*

## CHAPITRE I

### CALCUL NUMÉRIQUE ET LITTÉRAL

*Toute grammaire commence par un alphabet. Avant de formuler des théorèmes ou de bâtir des théories, il faut apprendre à écrire : poser les priorités opératoires, manier les fractions et les puissances, reconnaître les identités remarquables. Ces règles ne sont pas des conventions arbitraires ; elles sont la syntaxe élémentaire d'une langue dans laquelle la réalité se laisse décrire.*

*Articles de ce chapitre :*

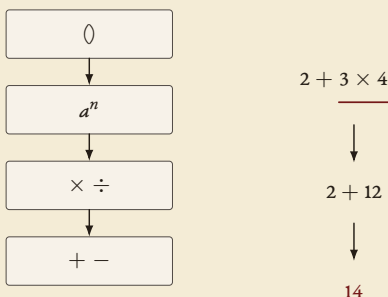
- 001. *Écritures, priorités, calcul numérique — Pourquoi  $2+3\times 4$  ne vaut pas 20 : le calcul n'est pas une lecture de gauche à droite*
- 002. *Fractions, puissances, racines — Ces trois familles d'écritures reviennent partout ; les maîtriser, c'est s'équiper pour la suite*
- 003. *Proportionnalité et règle de trois — La proportionnalité est le modèle le plus simple de relation entre deux grandeurs*
- 004. *Développer et factoriser — Une même expression peut s'écrire sous forme développée ou factorisée ; chaque forme a ses usages*
- 005. *Identités remarquables — Développer  $(a + b)^2$  donne toujours le même schéma : ce n'est pas un hasard, c'est la distributivité*
- 006. *Binôme de Newton — On connaît  $(a + b)^2$  ; que se passe-t-il pour  $(a + b)^3$ ,  $(a + b)^4$  et au-delà ?*
- 007. *Inégalités et erreurs de calcul typiques — Beaucoup d'erreurs de lycée viennent de règles d'égalité appliquées à tort aux inégalités*

#### **I. ÉCRITURES, PRIORITÉS, CALCUL NUMÉRIQUE.**

COMBIEN vaut  $2 + 3 \times 4$  ? Beaucoup de lecteurs, la première fois, répondent 20. On lit de gauche à droite, on additionne d'abord, on multiplie ensuite, et l'affaire semble réglée. Or le résultat est 14. L'erreur ne tient pas à un manque d'attention. Elle tient à un

fait plus profond : un calcul n'est pas une phrase qu'on lirait mot à mot. C'est une architecture, et cette architecture a des règles. Ces règles existent pour une raison simple. Si chacun choisissait son propre ordre de lecture, une même écriture produirait des résultats différents. L'écriture mathématique deviendrait ambiguë, donc inutile. Les priorités opératoires sont la convention qui lève cette ambiguïté.

La figure ci-dessous résume cette hiérarchie et montre pourquoi la multiplication est effectuée avant l'addition dans  $2 + 3 \times 4$ .



*Priorités opératoires : les opérations les plus liantes sont effectuées en premier*

**DÉFINITION 1.1** : Les opérations s'effectuent dans l'ordre de priorité suivant :

1. les parenthèses (en commençant par les plus intérieures),
2. les puissances,
3. les multiplications et divisions (de gauche à droite),
4. les additions et soustractions (de gauche à droite).

Le signe  $-$  d'un opposé, placé devant un nombre comme dans  $-3^2$ , se traite comme une multiplication par  $-1$  : après les puissances.

L'idée est hiérarchique : les opérations les plus « liantes » s'exécutent en premier. La puissance lie plus que la multiplication, qui lie plus que l'addition. On peut penser à la ponctuation d'un texte : le point-virgule sépare moins fortement que le point, et la virgule moins que le point-virgule. L'analogie porte sur la hiérarchie : dans  $2 + 3 \times 4$ , la multiplication lie 3 et 4 en un bloc, tandis que  $+$  sépare les deux termes de la somme.

Pourquoi la multiplication passe-t-elle avant l'addition, et non l'inverse ? Parce que les sommes de produits sont partout : un prix total  $3 \times 4,50 + 2 \times 1,20$ , une expression  $3x + 2$ . Avec cette convention, elles s'écrivent sans aucune parenthèse ; la convention inverse en exigerait à chaque ligne. La règle choisit l'écriture la plus économe pour les expressions les plus fréquentes : c'est une convention, mais pas un caprice.

**EXEMPLE :** Calculons  $5 + 2 \times (3^2 - 1) \div 4$ . On commence par la parenthèse ; à l'intérieur, la puissance d'abord :  $3^2 = 9$ , puis la soustraction :  $9 - 1 = 8$ . Ensuite la multiplication :  $2 \times 8 = 16$ . Puis la division :  $16 \div 4 = 4$ . Enfin l'addition :  $5 + 4 = 9$ .

Les parenthèses, quant à elles, ne sont pas un ornement. Elles sont une *instruction* : « fais ceci d'abord, quoi que disent les priorités habituelles. »

**EXEMPLE :** Comparons  $(2 + 3) \times 4 = 20$  et  $2 + 3 \times 4 = 14$ . Les symboles sont presque identiques, mais les parenthèses changent la structure, donc le résultat.

La barre de fraction, elle aussi, joue un rôle structurel qu'on oublie souvent : elle agit comme une parenthèse invisible autour du numérateur et du dénominateur. Écrire  $\frac{2+3}{4}$  signifie  $(2+3) \div 4$ , et non  $2 + 3 \div 4$ .

**ERREUR TYPIQUE :** Confondre  $-3^2$  et  $(-3)^2$ . L'écriture  $-3^2$  signifie  $-(3^2) = -9$  : la puissance porte sur 3 seul, et le signe négatif s'applique après. L'écriture  $(-3)^2$  signifie  $(-3) \times (-3) = 9$  : la puissance porte sur le nombre  $-3$  tout entier. Un simple placement

de parenthèses fait basculer le signe du résultat. C'est un piège classique et durable.

La rigueur dans l'écriture est la première forme de rigueur mathématique, et peut-être la plus sous-estimée. Un raisonnement peut être juste dans l'esprit et faux sur le papier. Respecter les priorités, placer les parenthèses là où elles sont nécessaires, soigner chaque étape intermédiaire : c'est par là que commence tout travail sérieux. Non pas parce que les conventions sont sacrées, mais parce que sans elles, l'écriture cesse de communiquer.

*Le premier exercice vérifie que les priorités sont respectées dans un calcul à plusieurs niveaux (la division avant l'addition et la soustraction). Le second teste le piège le plus fréquent du chapitre : la confusion entre  $-a^2$  et  $(-a)^2$ , qui change le signe du résultat.*

- Calculez  $4 + 6 \div 2 - 1$ .

Solution : On applique les priorités : d'abord la division, puis les additions/soustractions de gauche à droite. (1) Division :  $6 \div 2 = 3$ . (2) L'expression devient  $4 + 3 - 1$ . (3) De gauche à droite :  $4 + 3 = 7$ , puis  $7 - 1 = 6$ . Réponse : 6. Erreur courante : faire  $4 + 6 = 10$  d'abord (oublier la priorité de la division).

- Sans calculatrice : que valent  $-5^2$  et  $(-5)^2$  ?

Solution :  $-5^2$  : la puissance porte sur 5 seul (pas le signe), donc  $-5^2 = -(5^2) = -25$ .  $(-5)^2$  : la puissance porte sur le nombre — 5 tout entier, donc  $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$  (moins fois moins donne plus). Les deux résultats ont des signes opposés :  $-25$  et  $+25$ . Le placement des parenthèses change tout.

## 2. FRACTIONS, PUISSANCES, RACINES.

POURQUOI ne peut-on pas additionner  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{5}{6}$  en additionnant simplement numérateurs et dénominateurs ? Pourquoi  $2^3 \times 2^5$  ne vaut-il pas  $2^{15}$  ? Pourquoi  $\sqrt{9+16}$  n'est-il pas  $\sqrt{9} + \sqrt{16}$  ? Ces trois questions ont une réponse commune : fractions, puissances et racines possèdent chacune leur propre grammaire, et cette grammaire ne tolère aucune improvisation.

Ces trois familles d'écritures sont les briques de presque tout calcul algébrique. Comme les conjugaisons en langue, elles se retiennent une fois, puis se pratiquent sans y penser. Mais la moindre confusion mène à l'erreur.

**DÉFINITION 2.1 :** Une *fraction* est une écriture  $\frac{a}{b}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres (le plus souvent des entiers) avec  $b \neq 0$ ;  $a$  est le numérateur,  $b$  le dénominateur. Deux fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont égales, c'est-à-dire représentent le même nombre, si et seulement si  $a \times d = b \times c$ .

**RÈGLE :** Pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur. Pour les multiplier, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux. Pour diviser par une fraction non nulle, on multiplie par son inverse.

**EXEMPLE :**  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ . Et  $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ .

Additionner numérateurs et dénominateurs donnerait  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  : deux moitiés feraient une moitié. On n'additionne des parts que si elles ont la même taille, c'est-à-dire le même dénominateur.

L'addition exige un terrain commun (le dénominateur partagé) tandis que la multiplication, paradoxalement plus simple, n'en a pas besoin. Mais les fractions ne suffisent pas : dès qu'un calcul se répète, il faut une écriture qui comprime la répétition en un seul symbole.

**DÉFINITION 2.2 :** Pour tout nombre réel  $a$  et tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose  $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ . Pour  $a \neq 0$ , on pose de plus, par convention,  $a^0 = 1$  et  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

**RÈGLE :** Pour  $a, b \neq 0$  et  $m, n$  entiers, les puissances vérifient :

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m}, & \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, & (a^n)^m &= a^{nm}, \\ (ab)^n &= a^n b^n, & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

En clair, multiplier des puissances de même base revient à additionner les exposants. C'est logique :  $a^3 \times a^5$  est le produit de trois  $a$  et de cinq  $a$ , soit huit  $a$  au total.

La même règle explique les conventions de la définition. Pour que  $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$  reste vrai, il faut  $a^0 = 1$  ; pour que  $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$ , il faut  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ . Ces conventions sont les seules qui gardent les règles valables pour tous les exposants entiers.

**EXEMPLE :**  $2^3 \times 2^5 \div 2^4 = 2^{3+5-4} = 2^4 = 16$ . Et  $(3^2)^3 = 3^6 = 729$ .

**DÉFINITION 2.3 :** Pour tout réel  $a \geq 0$ , la *racine carrée*  $\sqrt{a}$  est l'unique réel positif dont le carré vaut  $a$  :  $(\sqrt{a})^2 = a$ . L'existence de ce réel est admise ici.

**RÈGLE :** Pour  $a, b \geq 0$  :  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  et  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  (avec  $b > 0$ ). Mais attention :  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  en général.

La racine carrée se distribue sur le produit, mais pas sur la somme. C'est l'un des pièges les plus tenaces du calcul : l'envie de « distribuer » un symbole sur une addition est un réflexe qu'il faut apprendre à réprimer.

**EXEMPLE :**  $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ . Pour rationaliser  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , on multiplie haut et bas par  $\sqrt{3}$  :  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Un fil relie ces trois familles : elles organisent la multiplication, sa répétition et les opérations qui les défont. La fraction  $\frac{a}{b}$  défait la multiplication ( $b \times \frac{a}{b} = a$ ). La puissance  $a^n$  comprime la multiplication répétée. Et la racine  $\sqrt{a}$  défait l'élévation au carré sur les nombres positifs ; en général,  $\sqrt{x^2} = |x|$ , la valeur absolue de  $x$  (article 008). C'est cette architecture d'opérations et d'inverses qui traverse toute l'algèbre : des fractions simples jusqu'aux logarithmes, qui déferont un jour l'exponentielle.

L'article couvre trois familles d'écritures, et chacune mérite sa gamme. Le premier exercice teste l'addition de fractions (trouver le dénominateur commun). Le deuxième vérifie les règles des exposants (additionner pour un produit, soustraire pour un quotient). Le troisième teste la simplification d'une racine carrée et le piège  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

- Calculez  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ .

Solution : On ne peut pas additionner directement : les dénominateurs sont différents (3 et 4). Il faut un dénominateur commun : le plus petit multiple commun de 3 et 4 est 12. On convertit :  $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$  et  $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$ . On additionne les numérateurs :  $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$ . Vérification :  $\frac{17}{12} \approx 1,417$  et  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \approx 0,667 + 0,750 = 1,417$ . Correct.

- Simplifiez  $2^5 \times 2^3 \div 2^6$ .

Solution : Même base (2) partout. Règle : on additionne les exposants pour la multiplication, on soustrait pour la division.  $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$ . Puis  $2^8 \div 2^6 = 2^{8-6} = 2^2 = 4$ . Vérification :  $2^5 = 32$ ,  $2^3 = 8$ ,  $32 \times 8 = 256$ ,  $2^6 = 64$ ,  $256 \div 64 = 4$ . Correct.

- Simplifiez  $\sqrt{75}$ . Puis vérifiez que  $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$ .

Solution :  $\sqrt{75}$  : on cherche le plus grand carré parfait qui divise 75.  $75 = 25 \times 3$ , et  $25 = 5^2$ . Donc  $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ . Vérification :  $5\sqrt{3}$  :  $25 \times 3 = 75$ . Correct. Pour le piège :  $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,606$ . Et  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ . On a  $3,606 \neq 5$ . La racine d'une somme n'est pas la somme des racines. C'est l'erreur la plus fréquente avec les racines carrées.

### 3. PROPORTIONNALITÉ ET RÈGLE DE TROIS.

UN enfant de huit ans sait déjà raisonner proportionnellement : « si deux bonbons coûtent un euro, quatre bonbons coûtent deux euros. » Ce geste mental (doubler la cause double l'effet) est si naturel qu'on le croit universel. Mais il ne l'est pas. Doubler la température d'un four ne cuit pas un gâteau deux fois plus vite. Toute la difficulté de la proportionnalité tient là : savoir quand elle s'applique, et quand elle trompe.

**DÉFINITION 3.1 :** Deux grandeurs sont *proportionnelles* lorsque l'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*.

**EXEMPLE :** Si 3 kg de pommes coûtent 4,50 €, le coefficient de proportionnalité est  $\frac{4,50}{3} = 1,50$  €/kg. Le prix de 7 kg est donc  $7 \times 1,50 = 10,50$  €.

Le coefficient est le fil invisible qui relie les deux grandeurs : connaître l'une, c'est connaître l'autre. Mais comment trouver une valeur inconnue quand on dispose de trois données ? C'est précisément le rôle de la règle de trois.

**RÈGLE :** La règle de trois repose sur le produit en croix : si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , alors  $a \times d = b \times c$ . Elle permet de trouver une quatrième proportionnelle quand on en connaît trois, dès lors que la division nécessaire se fait par un nombre non nul.

**EXEMPLE :** Si 3 kg de pommes coûtent 4,50 €, combien coûtent 5 kg? Les grandeurs sont proportionnelles, donc  $\frac{4,50}{3} = \frac{x}{5}$ . Le produit en croix donne  $3x = 5 \times 4,50 = 22,50$ , d'où  $x = 7,50$  €.

La règle de trois suppose une proportionnalité directe. L'exemple suivant montre ce qui change quand le lien est inverse.

**EXEMPLE :** On suppose que chaque ouvrier garde le même rendement et que le travail se partage sans perte de temps. 5 ouvriers font un travail en 12 jours. Combien de jours pour 8 ouvriers? Ici, la proportionnalité est inverse : plus d'ouvriers, moins de jours. Le produit ouvriers  $\times$  jours est constant :  $5 \times 12 = 60$ , donc 8 ouvriers mettent  $60 \div 8 = 7,5$  jours.

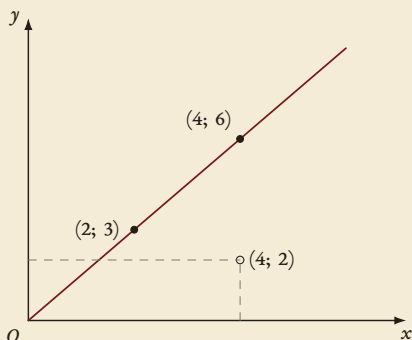
Cet exemple illustre un point crucial : la proportionnalité inverse fonctionne à rebours de l'intuition directe. Augmenter un facteur diminue l'autre. Il faut reconnaître la nature du lien avant d'appliquer la méthode.

**DÉFINITION 3.2 :** Un pourcentage est une fraction de dénominateur 100. Dire « 15 % de  $x$  » signifie  $\frac{15}{100} \times x = 0,15x$ .

**EXEMPLE :** On augmente un prix de 120 € de 15 % : le nouveau prix est  $120 \times 1,15 = 138$  €. On le réduit ensuite de 15 % :  $138 \times 0,85 = 117,30$  €. On ne retrouve pas 120 €. Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 15 % ne se compense pas, car les deux pourcentages ne portent pas sur le même montant.

Ce résultat surprend souvent. Il s'explique dès qu'on voit un pourcentage comme une multiplication : augmenter de 15 % revient à multiplier par 1,15, baisser de 15 % à multiplier par 0,85. Les deux évolutions se composent donc par produit :  $1,15 \times 0,85 = 0,9775$ , soit une baisse globale de 2,25 %. Pour revenir au prix de départ, il faudrait diviser par 1,15, c'est-à-dire baisser d'environ 13,04 %. Il faut enfin distinguer proportionnalité directe (le quotient  $y/x$  reste constant) et proportionnalité inverse (le produit  $xy$  reste

constant). Le sens de variation ne suffit pas à trancher : pour  $x > 0$ ,  $y = x^2$  croît avec  $x$  sans être proportionnelle à  $x$ . Graphiquement, la proportionnalité directe se reconnaît à sa représentation : une droite passant par l'origine.



*Proportionnalité directe : les points alignés sur une droite passant par l'origine*

La figure ci-dessus le confirme : les points représentant des couples proportionnels s'alignent sur une droite passant par l'origine, tandis qu'un point hors de cette droite trahit une rupture de proportionnalité.

Vitesse, échelle d'une carte, concentration chimique, conversion de devises : la proportionnalité est le premier modèle que l'on rencontre, et souvent le dernier auquel on pense quand la réalité se complique. Savoir l'identifier (et savoir la récuser quand elle ne s'applique pas) est le début de toute modélisation sérieuse.

---

*Le premier exercice teste la proportionnalité inverse (le piège : plus d'ouvriers, moins de jours, pas plus). Le second vérifie que le lecteur a compris pourquoi une hausse suivie d'une baisse du même pourcentage ne ramène pas au point de départ.*

- 8 ouvriers font un travail en 6 jours. À rendement individuel constant et si le travail se partage sans perte de temps, combien de jours pour 12 ouvriers ?

Solution : C'est une proportionnalité *inverse* : plus d'ouvriers, moins de jours. Le produit d'ouvriers, jours est constant :  $8 \times 6 = 48$ . Donc 12 ouvriers mettront  $48 \div 12 = 4$  jours. Vérification :  $12 \times 4 = 48 = 8 \times 6$ . Correct. Erreur courante : appliquer la proportionnalité directe ( $12/8 \times 6 = 9$  jours), ce qui donnerait *plus* de jours pour *plus* d'ouvriers, absurde.

- Un article coûte 250 €. On l'augmente de 20 %, puis on le réduit de 20 %. Retrouve-t-on 250 € ?

Solution : Augmentation :  $250 \times 1,20 = 300$  €. Réduction :  $300 \times 0,80 = 240$  €. On ne retrouve pas 250 mais 240 ! Pourquoi ? Parce que la hausse de 20 % porte sur 250 (+50), mais la baisse de 20 % porte sur 300 (−60). Les 20 % ne représentent pas le même montant. En général, multiplier par 1,20 puis par 0,80 donne  $1,20 \times 0,80 = 0,96$ , soit une baisse globale de 4 %.

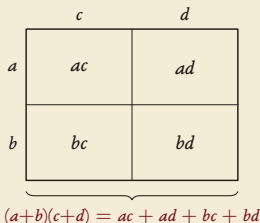
#### 4. DÉVELOPPER ET FACTORISER.

CONSIDÉRONS l'expression  $2x^2 - 7x - 15$ . Telle quelle, elle ne dit pas grand-chose. Mais sous la forme  $(2x + 3)(x - 5)$ , elle révèle immédiatement les valeurs qui l'annulent, appelées ses *racines* :  $x = -\frac{3}{2}$  et  $x = 5$ . Pour chaque valeur de  $x$ , les deux écritures donnent pourtant le même nombre : c'est la même expression. Seule la *forme* a changé, et avec elle, ce qu'on peut lire d'un coup d'œil.

C'est toute l'idée : une expression algébrique est comme un texte qu'on peut reformuler sans en altérer le sens. La forme développée étale les termes ; la forme factorisée les comprime en produit. Chacune éclaire un aspect différent.

**DÉFINITION 4.1 :** *Développer*, c'est transformer un produit en somme. *Factoriser*, c'est transformer une somme en produit. Ce sont les deux sens de lecture d'une même égalité.

**RÈGLE :** La *distributivité simple* donne  $k(a + b) = ka + kb$ . La *double distributivité* donne  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ .



*Double distributivité : chaque cellule contient un produit partiel*

**EXEMPLE :** Développons  $(2x + 3)(x - 5)$ . On applique la double distributivité :  $2x \cdot x + 2x \cdot (-5) + 3 \cdot x + 3 \cdot (-5) = 2x^2 - 10x + 3x - 15 = 2x^2 - 7x - 15$ .

Développer est mécanique : on multiplie chaque terme du premier facteur par chaque terme du second, puis on regroupe. Factoriser, en revanche, demande du flair. Il faut *voir* un facteur commun là où il se cache, reconnaître une structure là où il n'y a qu'une somme de termes.

**RÈGLE :** Pour *factoriser par un facteur commun*, on repère le plus grand facteur commun à tous les termes, puis on le met en évidence.

**EXEMPLE :** Factorisons  $6x^3 - 9x^2$ . Le facteur commun est  $3x^2$  :  $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$ .

Une autre ressource viendra à l'article suivant : reconnaître une identité remarquable, carré parfait ou différence de carrés.

Le choix entre forme développée et forme factorisée dépend du problème posé. Pour résoudre une équation « *produit nul* », il faut la forme factorisée :  $A \times B = 0$  si et seulement si  $A = 0$  ou  $B = 0$  (propriété des nombres réels, admise ici). Pour simplifier ou comparer des expressions, la forme développée et réduite est souvent plus commode. Le mathématicien ne choisit pas une forme par habitude, mais par stratégie : quelle écriture rend le problème transparent ? C'est une leçon qui dépasse de loin le calcul algébrique : en mathématiques, la difficulté d'un problème tient souvent moins à sa nature qu'à la manière dont on le regarde. Développer et factoriser sont deux lectures d'une même réalité : la première étale, la seconde condense. Ce va-et-vient entre deux formes d'une même expression est le premier exemple d'un geste qui traverse toutes les mathématiques : changer de point de vue pour voir ce qui était invisible.

---

*Les deux exercices testent la factorisation par un facteur commun : repérer le plus grand facteur commun, puis, dans le second, ne pas oublier le terme qui devient 1.*

- Factorisez  $12x^2 - 8x$ .

Solution : On cherche le plus grand facteur commun aux deux termes. Les coefficients :  $\text{PGCD}(12, 8) = 4$ . Les variables :  $x^2$  et  $x$  ont en commun  $x$  (le plus petit exposant). Donc le facteur commun est  $4x$ . On factorise :  $12x^2 - 8x = 4x(3x - 2)$ . Vérification en développant :  $4x \times 3x = 12x^2$  et  $4x \times (-2) = -8x$ . Correct.

- Factorisez  $15x^3 - 10x^2 + 5x$ .

Solution : Les coefficients :  $\text{PGCD}(15, 10, 5) = 5$ . Les variables :  $x^3$ ,  $x^2$  et  $x$  ont en commun  $x$ . Le facteur commun est donc  $5x$  :  $15x^3 - 10x^2 + 5x = 5x(3x^2 - 2x + 1)$ . Vérification en développant :  $5x \times 3x^2 = 15x^3$ ,  $5x \times (-2x) = -10x^2$ ,  $5x \times 1 = 5x$ . Correct. Erreur courante : écrire  $5x(3x^2 - 2x)$ , en oubliant que le dernier terme  $5x$  devient 1, et non 0.

**5. IDENTITÉS REMARQUABLES.**

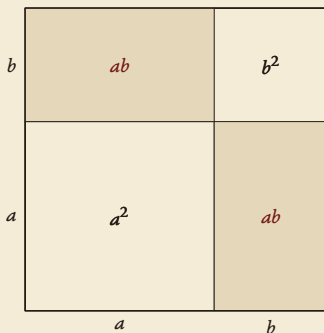
DÉVELOPPEZ  $(2 + 3)^2 = (2 + 3)(2 + 3)$  terme à terme, puis  $(10 + 1)^2$ , puis  $(a + b)^2$ . Chaque fois, le même schéma émerge : un carré, un autre carré, et un double produit entre les deux. Cette régularité n'est pas un hasard. Elle est la conséquence directe de la double distributivité, vue à l'article précédent, et elle se condense en trois formules que l'on rencontre si souvent qu'elles ont mérité un nom : les identités remarquables.

**PROPOSITION 5.1 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**PREUVE COMMENTÉE :** On développe par distributivité :  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$ .

La figure ci-dessous offre une preuve sans mots : pour  $a, b \geq 0$ , un grand carré de côté  $a + b$  se découpe en quatre morceaux dont les aires sont exactement  $a^2$ ,  $ab$ ,  $ab$  et  $b^2$  ; le calcul algébrique qui précède, lui, vaut pour tous les réels. L'algèbre et la géométrie disent la même chose. Les deux rectangles teintés ont chacun pour aire  $ab$ , d'où le coefficient 2 dans l'identité.



*Preuve géométrique : le carré de côté  $a + b$  se décompose en quatre régions*

**PROPOSITION 5.2 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**EXEMPLE :** Calculons  $(3x - 2)^2$ . On identifie  $a = 3x$  et  $b = 2$  :  
 $(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$ .

**PROPOSITION 5.3 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cette troisième identité est peut-être la plus élégante. Elle dit que le produit de deux nombres placés de part et d'autre d'un pivot, à la même distance, est presque le carré du pivot : il lui manque exactement le carré de cette distance.

**EXEMPLE :** Combien vaut  $101 \times 99$ ? On écrit  $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$ . L'identité remarquable transforme un produit en un calcul mental.

**PROPOSITION 5.4 : Identités de degré trois.** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Les deux premières s'obtiennent en développant  $(a \pm b)^2(a \pm b)$ , les deux dernières en développant le membre de droite. Elles prolongent les identités du second degré et servent dès qu'un cube apparaît.

Ces identités fonctionnent dans les deux sens. Du produit vers la somme, c'est *développer*. De la somme vers le produit, c'est *factoriser*. Cette réversibilité est leur force : selon le problème, on choisit la direction qui simplifie.

**EXEMPLE :** L'expression  $x^2 - 6x + 9$  se reconnaît comme  $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$ . De même,  $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$ .

Trois formules du second degré, quatre du troisième, deux directions, des applications innombrables. Du calcul mental à la résolution d'équations, de la factorisation à l'étude de fonctions, ces identités traversent les mathématiques du lycée et bien au-delà, comme un vocabulaire de base qu'on ne cesse d'employer sans toujours se rappeler qu'on l'a un jour appris.

*Le premier exercice fait pratiquer l'identité  $(a - b)^2$  sur un cas avec coefficients (identifier  $a = 5x$ ,  $b = 3$ , ne pas oublier le double produit). Le second utilise  $(a + b)(a - b)$  pour un calcul mental : transformer un produit de deux nombres proches d'un pivot en un carré moins un carré.*

- Développez  $(5x - 3)^2$ .

Solution : On identifie  $a = 5x$  et  $b = 3$ . La formule  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  donne :  $(5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$ . Détail :  $(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$  (ne pas oublier le carré du coefficient). Le double produit :  $2 \times 5x \times 3 = 30x$ . Le carré de  $b$  :  $3^2 = 9$ . Réponse :  $25x^2 - 30x + 9$ .

- Calculez  $52 \times 48$  mentalement.

Solution : On reconnaît  $(50 + 2)(50 - 2)$ . C'est l'identité  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  avec  $a = 50$  et  $b = 2$ . Donc  $52 \times 48 = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$ . Vérification :  $52 \times 48 = 52 \times 50 - 52 \times 2 = 2600 - 104 = 2496$ . Correct. L'identité remarquable transforme un produit en un calcul mental simple.

## 6. BINÔME DE NEWTON.

ON sait développer  $(a + b)^2$ . Avec un peu de patience, on peut développer  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . Mais  $(a + b)^7$  ?  $(a + b)^{20}$  ? La distributivité appliquée à la main devient vite impraticable. Il faut une formule, et cette formule existe. Elle porte en français le nom de Newton, et elle repose sur un triangle de nombres dont la simplicité cache une richesse remarquable. Le nom est un raccourci historique : la formule pour les exposants entiers et le triangle étaient connus bien avant lui, d'al-Karaji vers l'an mil à

Yang Hui au XIII<sup>e</sup> siècle et à Pascal en 1654 ; Newton l'a étendue, vers 1665, aux exposants fractionnaires.

Avant d'énoncer la formule, il faut disposer du bon outil : un nombre qui compte combien de façons on peut choisir  $k$  éléments parmi  $n$ .

**DÉFINITION 6.1 :** Pour deux entiers  $n \geq 0$  et  $0 \leq k \leq n$ , le *coefficient binomial* est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où  $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$  (avec  $0! = 1$ ).

On démontrera plus bas que ce nombre compte les façons de choisir  $k$  éléments parmi  $n$ .

**EXEMPLE :** Pour  $n = 4$  :  $\binom{4}{0} = 1$ ,  $\binom{4}{1} = 4$ ,  $\binom{4}{2} = 6$ ,  $\binom{4}{3} = 4$ ,  $\binom{4}{4} = 1$ .

On remarque la symétrie : les valeurs forment un palindrome. Ce n'est pas un accident : échanger  $k$  et  $n-k$  ne change pas la formule, et, quand on saura que  $\binom{n}{k}$  compte des choix, choisir  $k$  éléments parmi  $n$  reviendra à choisir les  $n-k$  éléments qu'on laisse de côté.

**PROPOSITION 6.2 :** *Triangle de Pascal.* Pour  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n-1$ , c'est-à-dire hormis les 1 aux deux extrémités de chaque ligne, chaque coefficient binomial est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**PREUVE COMMENTÉE :** On met les deux fractions au même dénominateur  $k!(n-k)!$ , en multipliant la première en haut et en bas

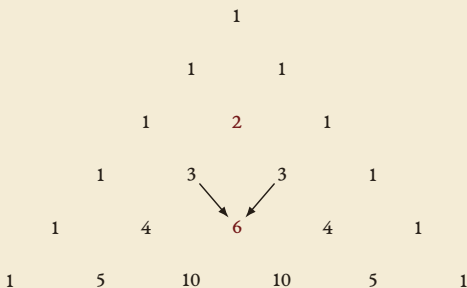
par  $k$ , la seconde par  $n - k$  :

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} &= \frac{(n-1)!(k + (n-k))}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

**PROPOSITION 6.3 :** Pour  $0 \leq k \leq n$ , le nombre de façons de choisir  $k$  éléments parmi  $n$  est  $\binom{n}{k}$ .

**PREUVE COMMENTÉE :** Notons  $N(n, k)$  ce nombre. Il n'y a qu'une façon de ne rien choisir et qu'une façon de tout prendre :  $N(n, 0) = N(n, n) = 1$ . Pour  $1 \leq k \leq n - 1$ , mettons à part l'un des  $n$  éléments. Un choix de  $k$  éléments le contient, et il reste  $k - 1$  éléments à prendre parmi les  $n - 1$  autres, ou ne le contient pas, et les  $k$  éléments sont pris parmi les  $n - 1$  autres :  $N(n, k) = N(n - 1, k - 1) + N(n - 1, k)$ . Les nombres  $N(n, k)$  ont donc les mêmes valeurs que les  $\binom{n}{k}$  aux extrémités de chaque ligne et se construisent par la même relation ; ligne après ligne, ils leur sont égaux.

Cette relation permet de construire les coefficients ligne par ligne, comme un mur de briques : chaque entrée est la somme des deux entrées situées juste au-dessus d'elle. On obtient 1 ; 1 1 ; 1 2 1 ; 1 3 3 1 ; 1 4 6 4 1 ; et ainsi de suite.



Le schéma ci-dessus rend visible cette construction pyramidale : chaque nombre est la somme des deux qui le surplombent, et la symétrie de chaque ligne reflète l'identité  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

**PROPOSITION 6.4 :** *Formule du binôme de Newton.* Pour tous réels  $a, b$  et tout entier  $n \geq 1$ , avec la convention  $x^0 = 1$  valable pour tout réel  $x$  (y compris  $x = 0$ ) dans cette formule :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Le symbole  $\sum$  abrège une somme indexée :  $\sum_{k=0}^n t_k = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ . Les sommes indexées seront pratiquées pour elles-mêmes au chapitre 15.

**PREUVE COMMENTÉE :** Développer  $(a + b)^n = (a + b)(a + b) \cdots (a + b)$ , c'est choisir dans chacun des  $n$  facteurs soit  $a$ , soit  $b$ , puis additionner tous les produits obtenus. Le produit  $a^{n-k} b^k$  apparaît chaque fois que l'on choisit  $b$  dans exactement  $k$  facteurs : autant de fois qu'il y a de façons de choisir ces  $k$  facteurs parmi  $n$ , soit  $\binom{n}{k}$  fois d'après la proposition précédente. Après regroupement, le développement compte  $n + 1$  termes.

**EXEMPLE :** Développons  $(x + 2)^4$ . Les coefficients de la ligne  $n = 4$  sont 1, 4, 6, 4, 1. Donc  $(x + 2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 4 + 4x \cdot 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ .

Dans le cas particulier  $a = 1$ , les coefficients du développement de  $(1 + x)^n$  sont directement les  $\binom{n}{k}$ .

**EXEMPLE :**  $(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ . Les signes alternent car  $b = -x$ .

Le binôme de Newton est bien plus qu'une formule de calcul : c'est un premier pont entre l'algèbre et la combinatoire, entre les identités formelles et le dénombrement. On le retrouvera en probabilités, au volume suivant dans les développements limités, et partout où il faut compter en même temps que calculer.

Le premier exercice fait construire une ligne du triangle de Pascal à la main (addition des coefficients deux à deux). Le second applique la formule du binôme à un cas concret avec  $b$  négatif, ce qui fait alterner les signes.

- Écrivez la ligne  $n = 5$  du triangle de Pascal.

Solution : La ligne  $n = 4$  est 1, 4, 6, 4, 1. Pour construire la ligne  $n = 5$ , on additionne les paires consécutives et on met des 1 aux extrémités : 1, 1 + 4 = 5, 4 + 6 = 10, 6 + 4 = 10, 4 + 1 = 5, 1. Réponse : 1, 5, 10, 10, 5, 1. Vérification : la somme 10, 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2<sup>5</sup>.

- Développez  $(x - 1)^4$ .

Solution : Étape 1 : coefficients. Ligne  $n = 4$  du triangle de Pascal : 1, 4, 6, 4, 1. Étape 2 : on identifie  $a = x$  et  $b = -1$ . Étape 3 : puissances de  $b$  :  $(-1)^0 = 1$ ,  $(-1)^1 = -1$ ,  $(-1)^2 = 1$ ,  $(-1)^3 = -1$ ,  $(-1)^4 = 1$ . Les signes alternent ! Étape 4 : on assemble terme par terme. Terme  $k = 0$  :  $1 \times x^4 \times 1 = x^4$ . Terme  $k = 1$  :  $4 \times x^3 \times (-1) = -4x^3$ . Terme  $k = 2$  :  $6 \times x^2 \times 1 = 6x^2$ . Terme  $k = 3$  :  $4 \times x \times (-1) = -4x$ . Terme  $k = 4$  :  $1 \times 1 \times 1 = 1$ . Étape 5 : résultat :  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ . Vérification pour  $x = 2$  :  $(2 - 1)^4 = 1^4 = 1$ . Et  $16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$ . Correct.

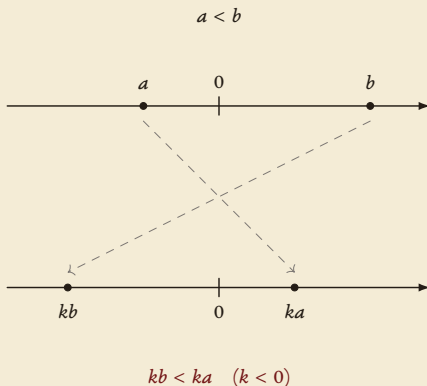
## 7. INÉGALITÉS ET ERREURS DE CALCUL TYPIQUES.

VOICI un raisonnement qui semble correct : «  $-3 < 1$ , donc  $(-3)^2 < 1^2$ , donc  $9 < 1$ . » La conclusion est absurde, pourtant chaque étape avait l'air légitime. L'erreur est subtile : on a appliqué aux inégalités une opération (l'élévation au carré) qui ne conserve l'ordre que sous certaines conditions. Les inégalités ressemblent aux égalités, mais elles obéissent à une logique plus fragile, et cette fragilité est la source de certaines des erreurs les plus tenaces du lycée.

**RÈGLE** : On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens : si  $a < b$ , alors  $a + c < b + c$ . On peut multiplier les deux membres par un nombre *strictement positif* sans changer le sens : si  $a < b$  et  $k > 0$ , alors  $ka < kb$ .

**RÈGLE :** Multiplier les deux membres par un nombre *strictement négatif* **inverse le sens** de l'inégalité : si  $a < b$  et  $k < 0$ , alors  $ka > kb$ .

C'est cette inversion du sens qui trompe. L'addition est inoffensive : elle translate les deux membres sans modifier leur position relative. Mais la multiplication par un nombre négatif est comme un miroir : elle retourne l'axe des nombres, et avec lui, l'ordre.



*Multipliation par  $k < 0$  : l'ordre s'inverse comme dans un miroir*

**EXEMPLE :** Résolvons  $-2x > 6$ . On divise par  $-2$ , qui est négatif : le sens s'inverse. On obtient  $x < -3$ . Vérification :  $x = -4$  convient, car  $-2 \times (-4) = 8 > 6$  ;  $x = 0$  ne convient pas, car  $0 > 6$  est faux.

Les trois erreurs qui suivent sont des variations du même mécanisme : appliquer à une inégalité une opération qui ne préserve pas l'ordre.

**ERREUR TYPIQUE :** « Si  $a < b$ , alors  $a^2 < b^2$ . » C'est faux en général.

**CONTRE-EXEMPLE :** Prenons  $a = -3$  et  $b = 1$ . On a bien  $-3 < 1$ , mais  $(-3)^2 = 9 > 1 = 1^2$ .

L'élévation au carré conserve l'ordre lorsque les deux nombres sont positifs, mais peut le renverser dès que l'un d'eux est négatif.

Même piège, autre opération : pour deux nombres non nuls, prendre l'inverse retourne l'ordre quand les signes sont identiques, mais le conserve quand ils diffèrent.

**ERREUR TYPIQUE** : « Si  $a < b$ , alors  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ . » Ce n'est vrai que si  $a$  et  $b$  sont de même signe.

**CONTRE-EXEMPLE** : Comparons  $\frac{1}{-2}$  et  $\frac{1}{3}$ . On a  $-2 < 3$ , et effectivement  $\frac{1}{-2} = -0,5 < 0,33\dots = \frac{1}{3}$ . L'inégalité entre les inverses va ici dans le même sens, car les nombres sont de signes contraires.

Enfin, la racine carrée piège autrement : ce n'est pas l'ordre qu'elle détruit (elle le conserve sur les nombres positifs), mais l'additivité. Elle se distribue sur le produit, mais pas sur la somme :  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  ne coïncident que si l'un des deux nombres est nul.

**ERREUR TYPIQUE** : «  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ . » C'est presque toujours faux.

**CONTRE-EXEMPLE** : Avec  $a = 3$  et  $b = 4$  :  $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ , alors que  $3 + 4 = 7$ . On a  $5 \neq 7$ .

La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées.

Le fil commun est toujours le même : une opération qui fonctionne sans conditions sur les égalités exige des hypothèses dès qu'on l'applique aux inégalités. C'est une asymétrie profonde : l'égalité est robuste, elle survit à toute opération définie appliquée aux deux membres, la réciproque exigeant en plus que l'opération soit réversible ; l'ordre, lui, est fragile, il ne résiste qu'aux opérations qui respectent sa direction. Cette fragilité explique pourquoi manier des inégalités est, en un sens, plus délicat que manier des égalités ; et c'est pourquoi les erreurs s'y concentrent.

Connaître les pièges, c'est déjà les éviter, mais seulement à moitié. L'autre moitié exige de comprendre *pourquoi* le piège fonctionne : quelle hypothèse manquante, quelle condition oubliée. En mathématiques, la vigilance n'est pas un trait de caractère ; c'est une compétence, et elle se cultive.

*L'article présente trois erreurs typiques : chacune mérite sa gamme. Le premier exercice fait pratiquer l'inversion du sens lors d'une division par un nombre négatif. Le second fait passer aux inverses de deux nombres strictement positifs. Le troisième teste le piège  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ , l'erreur la plus tenace.*

- Résolvez  $-3x \leq 9$ .

Solution : On divise les deux membres par  $-3$ . Attention :  $-3$  est *négatif*, donc le sens de l'inégalité s'inverse.  $-3x \leq 9 \Rightarrow x \geq 9 \div (-3) \Rightarrow x \geq -3$ . Vérification : pour  $x = -3 : -3 \times (-3) = 9$ , oui. Pour  $x = 0 : -3 \times 0 = 0 \leq 9$ , oui. Pour  $x = -4 : -3 \times (-4) = 12 \leq 9$  ? Non,  $12 > 9$ . Donc  $x = -4$  n'est pas solution, ce qui confirme  $x \geq -3$ .

- Si  $0 < a < b$ , comparez  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$ .

Solution : Comme  $a < 0 < b$ , le produit  $ab$  est strictement positif, donc  $\frac{ab}{1}$  aussi. On multiplie les deux membres de  $a < b$  par  $\frac{ab}{1}$  sans changer le sens :  $\frac{ab}{1} \cdot a < \frac{ab}{1} \cdot b$ , c'est-à-dire  $\frac{a}{1} < \frac{b}{1}$ . Exemple :  $2 < 5$  et  $\frac{5}{1} = 0,2 < 0,5 = \frac{2}{1}$ . Pour deux nombres strictement positifs, passer aux inverses renverse l'ordre.

- Vrai ou faux :  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 5 + 12 = 17$  ?

Solution : Faux.  $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ . Et  $5 + 12 = 17$ . On a  $13 \neq 17$ . La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées :  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$  en général. L'égalité n'a lieu que si  $b = 0$  avec  $a \geq 0$ , ou  $a = 0$  avec  $b \geq 0$ . Ici,  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$  : c'est le triplet pythagoricien (5, 12, 13), le plus connu après (3, 4, 5).

## MÉTHODES

**Étude 1. ★★ MÉTHODE :** *décoder un calcul croisant fractions, puissances et priorités*

Les calculs réels combinent souvent fractions, puissances et parenthèses dans une même expression. La méthode reste la même (traiter du plus profond au plus superficiel), mais la difficulté vient de la superposition : il faut appliquer les règles de fractions et de puissances et de priorités simultanément. Le piège le plus fréquent : oublier que la barre de fraction agit comme une parenthèse invisible (le numérateur et le dénominateur sont chacun un bloc).

$$\text{Calculez } \frac{2^3 + 3 \times 5}{7 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

- Identifiez le numérateur et le dénominateur. Sont-ils des blocs séparés ?
- Calculez le numérateur : d'abord  $2^3$ , puis  $3 \times 5$ , puis l'addition.
- Calculez le dénominateur : d'abord  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ , puis la soustraction.
- Effectuez la division (numérateur  $\div$  dénominateur). Simplifiez si possible.
- Résumez : face à un calcul combinant fractions et puissances, quelle est la méthode ?

Solution 1 : (a) La barre de fraction sépare deux blocs : numérateur =  $2^3 + 3 \times 5$  et dénominateur =  $7 - (1/2)^2$ . Chacun se calcule indépendamment avant la division. (b) Numérateur :  $2^3 = 8$  (puissance d'abord),  $3 \times 5 = 15$  (multiplication),  $8 + 15 = 23$ . (c) Dénominateur :  $(1/2)^2 = 1/4$  (puissance d'abord),  $7 - 1/4 = 28/4 - 1/4 = 27/4$ . (d)  $\frac{23}{27/4} = 23 \times \frac{4}{27} = \frac{92}{27}$ . Ce n'est pas simplifiable (PGCD(92, 27) = 1). Vérification :  $92/27 \approx 3,41$ . (e) Traiter numérateur et dénominateur comme des blocs séparés, chacun avec ses priorités internes, puis diviser.

**Étude 2. ★ MÉTHODE : réduire au même dénominateur**

Pour additionner deux fractions  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ , il faut un dénominateur commun. Le plus simple est de prendre  $b \times d$ , mais c'est parfois inutilement grand. Le mieux est de prendre le PPCM de  $b$  et  $d$ , c'est-à-dire le plus petit entier non nul qui soit à la fois multiple de  $b$  et de  $d$  (il sera étudié au chapitre 4). Ensuite on multiplie chaque fraction par ce qu'il faut pour atteindre ce dénominateur commun, on additionne les numérateurs, et on simplifie si possible.

$$\text{Calculez } \frac{5}{6} - \frac{3}{8}.$$

(a) Quel est le PPCM de 6 et 8?

Indication : Écrivez les multiples de 8 : 8, 16, 24, 32, ... Quel est le premier qui soit aussi multiple de 6?

(b) Convertissez chaque fraction au dénominateur 24.

(c) Effectuez la soustraction.

(d) La fraction obtenue est-elle simplifiable?

(e) Résumez : pour additionner ou soustraire des fractions, quelle est la méthode?

Solution 2 : (a) PPCM(6, 8) = 24. (b)  $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$  et  $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$ . (c)  $\frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$ . (d) Les diviseurs de 11 sont 1 et 11, et 11 ne divise pas 24.  $\frac{11}{24}$  est irréductible. (e) Méthode : trouver le PPCM des dénominateurs, convertir, additionner/soustraire les numérateurs, simplifier.

**Étude 3. ★★ MÉTHODE : identifier le type de proportionnalité**

Face à un problème concret, il faut d'abord se demander : le quotient des deux grandeurs reste-t-il constant (proportionnalité directe) ou est-ce leur produit (proportionnalité inverse)? Le sens de variation oriente, mais seul le quotient ou le produit constant tranche. En proportionnalité directe, on divise puis on multiplie (règle de trois). En proportionnalité inverse, le produit des deux grandeurs est constant : on calcule ce produit, puis on divise.

On suppose la cadence d'impression constante, le rendement individuel des ouvriers constant et le travail partageable sans perte de temps. Deux problèmes. Problème A : une imprimante imprime 120 pages en 8 minutes.

Combien de pages en 15 minutes? Problème B : 6 ouvriers peignent une clôture en 10 heures. Combien d'heures pour 15 ouvriers?

(a) Problème A : plus de temps, plus de pages? Proportionnalité directe ou inverse?

(b) Calculez le coefficient (pages par minute) et déduisez le nombre de pages en 15 minutes.

(c) Problème B : plus d'ouvriers, plus d'heures ou moins d'heures? Directe ou inverse?

(d) En proportionnalité inverse, le produit est constant. Calculez ouvriers  $\times$  heures, puis déduisez le temps pour 15 ouvriers.

(e) Résumez : comment distinguer proportionnalité directe et inverse, et quelle méthode appliquer dans chaque cas?

Solution 3 : (a) Directe : plus de temps, plus de pages. (b)  $120 \div 8 = 15$  pages/min. En 15 min :  $15 \times 15 = 225$  pages. (c) Inverse : plus d'ouvriers, moins de temps. (d) Produit constant :  $6 \times 10 = 60$ . Pour 15 ouvriers :  $60 \div 15 = 4$  heures. Vérification :  $15 \times 4 = 60$ . (e) Directe : coefficient constant ( $y = kx$ ). Inverse : produit constant ( $x \times y = C$ ). Le sens de variation n'est qu'un indice, seul le coefficient ou le produit constant caractérise la relation.

#### Étude 4. ★★ MÉTHODE : factoriser systématiquement une expression

Pour factoriser une expression, on suit un ordre systématique : (1) chercher un facteur commun à tous les termes et le mettre en évidence; (2) si le résultat compte deux termes, vérifier la différence de carrés  $a^2 - b^2$ ; s'il en compte trois, vérifier le carré parfait  $a^2 \pm 2ab + b^2$ ; (3) si rien ne marche, tenter un regroupement : rassembler les termes deux à deux pour faire apparaître un facteur commun, comme dans  $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$ . L'erreur la plus fréquente est de sauter l'étape (1) et de chercher directement une identité.

Factorisez  $2x^3 - 18x$ .

(a) Y a-t-il un facteur commun à tous les termes? Lequel?

(b) Mettez-le en évidence. Que reste-t-il entre parenthèses?

(c) L'expression entre parenthèses est-elle une différence de carrés?

(d) Factorisez complètement.

(e) Résumez : quel est l'ordre à suivre pour factoriser ?

Solution 4 : (a) Oui :  $2x$  est facteur commun ( $2x^3 = 2x \cdot x^2$  et  $18x = 2x \cdot 9$ ).  
 (b)  $2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9)$ . Oui :  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ . Vérification :  $2x \cdot x \cdot x = 2x^3$ ;  
 $2x \cdot (-3) \cdot x = -6x^2$ ;  $2x \cdot 3 \cdot x = 6x^2$ ;  $2x \cdot (-3) \cdot 3 = -18x$ . Total :  $2x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 18x = 2x^3 - 18x$ . Correct.  
 (c) Ordre : facteur commun d'abord, puis identité remarquable, puis regroupement.

**Étude 5. ★★ MÉTHODE : construire et utiliser le triangle de Pascal**

Pour développer  $(a + b)^n$ , on a besoin des coefficients binomiaux. Le triangle de Pascal les fournit sans calcul de factorielles : on part de 1 au sommet, chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus de lui, et les bords sont toujours 1. La ligne  $n$  donne les coefficients de  $(a + b)^n$ . Les puissances de  $a$  décroissent de  $n$  à 0, celles de  $b$  croissent de 0 à  $n$ .

Développez  $(2x + 3)^3$ .

(a) Écrivez la ligne  $n = 3$  du triangle de Pascal.

Indication : Ligne  $n = 2 : 1, 2, 1$ . Pour  $n = 3 : 1, 1 + 2, 2 + 1, 1$ .

(b) Identifiez  $a = 2x$  et  $b = 3$ . Écrivez les puissances de  $a$  et de  $b$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

(c) Assemblez : pour chaque  $k$ , multipliez le coefficient par  $a^{3-k} \times b^k$ .

(d) Simplifiez chaque terme et additionnez.

(e) Résumez : comment développer  $(a+b)^n$  à l'aide du triangle de Pascal ?

Solution 5 : (a) Ligne  $n = 3 : 1, 3, 3, 1$ . (b) Puissances de  $a = 2x : (2x)^3 = 8x^3$ ,  $(2x)^2 = 4x^2$ ,  $(2x)^1 = 2x$ ,  $(2x)^0 = 1$ . Puissances de  $b = 3 : 3^0 = 1$ ,  $3^1 = 3$ ,  $3^2 = 9$ ,  $3^3 = 27$ . (c) Terme par terme :  $k = 0 : 1 \times 1 \times 8x^3 \cdot 1 = 8x^3$ ,  $k = 1 : 3 \times 4x^2 \times 3 = 36x^2$ ,  $k = 2 : 3 \times 3 \times 2x \times 9 = 54x$ ,  $k = 3 : 1 \times 1 \times 1 \times 27 = 27$ . (d) On additionne :  $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ . Vérification pour  $x = 1 : (2 + 3)^3 = 125$  et  $8 + 36 + 54 + 27 = 125$ . Correct. (e) Construire la ligne  $n$ , identifier  $a$  et  $b$ , calculer chaque terme séparément (le coefficient multiplié par  $a^{n-k} \times b^k$ ), puis additionner.

**Étude 6.** ★★ *piège* MÉTHODE : *manipuler les inégalités sans se tromper*

Les inégalités se manipulent comme les égalités, sauf quand on multiplie ou divise par un nombre négatif : dans ce cas, le sens s'inverse. L'erreur classique est d'oublier cette inversion. Autre piège : le carré conserve l'ordre sur les nombres positifs ou nuls ; avec un nombre négatif, il faut examiner la situation. La méthode : à chaque opération, se demander « est-ce que cette opération conserve l'ordre ? » avant de l'appliquer.

$$\text{Résolvez } \frac{2-x}{3} > 1.$$

(a) Multipliez les deux membres par 3. Le sens change-t-il ?

Indication : Le nombre 3 est-il positif ou négatif ?

(b) Vous obtenez  $2 - x > 3$ . Isolez  $x$ .

(c) À quelle étape le sens a-t-il changé (ou non) ?

(d) Vérifiez votre réponse avec  $x = -2$  (doit marcher) et  $x = 0$  (ne doit pas marcher).

(e) Résumez : quelles opérations inversent le sens d'une inégalité ?

Solution 6 : (a)  $3 > 0$ , pas d'inversion :  $2 - x > 3$ . (b)  $2 - x > 3 \Rightarrow -x > 1$ . On multiplie par  $-1$  : le sens s'inverse :  $x < -1$ . (c) Le sens a changé à la multiplication par  $-1$ . (d)  $x = -2$  :  $\frac{2-(-2)}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33 > 1$ , oui.  $x = 0$  :  $\frac{2-0}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,67 < 1$  : Non. Correct :  $0 \neq -1$ . (e) Multiplier ou diviser par un nombre négatif inverse le sens. Additionner/soustraire ne change jamais le sens.

**RÉCAPITULATIF DES MÉTHODES**

**PRIORITÉS** : Traiter les niveaux du plus profond (parenthèses) au plus superficiel (addition). Le sens de lecture, de gauche à droite, ne départage que des opérations de même niveau : multiplications et divisions entre elles, additions et soustractions entre elles.

**DÉNOMINATEUR COMMUN** : Trouver le PPCM des dénominateurs, convertir chaque fraction, additionner/soustraire les numérateurs, simplifier.

**PROPORTIONNALITÉ** : *Directe* = coefficient constant ( $y = kx$ ). *Inverse* = produit constant ( $xy = C$ ). Le sens de variation oriente, seul le quotient ou le produit constant caractérise la relation.

**FACTORISATION** : *Ordre* : (1) facteur commun, (2) identité remarquable, (3) regroupement. Ne jamais sauter l'étape (1).

**TRIANGLE DE PASCAL** : Construire ligne par ligne (chaque nombre = somme des deux au-dessus). La ligne  $n$  donne les coefficients de  $(a + b)^n$ .

**INÉGALITÉS** : À chaque opération, se demander : le sens change-t-il ? Parmi les opérations permises sur une inégalité linéaire, seule la multiplication ou la division par un nombre négatif l'inverse ; toute autre transformation (passage aux inverses, élévation au carré) demande une étude du sens de variation.

## EXPÉDITIONS

### EXPÉDITION 1 : LE CALCUL MENTAL ET LES IDENTITÉS

*Prérequis* : étude 4.

Peut-on multiplier de tête  $97 \times 103$  ? Et  $998 \times 1002$  ? Les identités remarquables transforment des produits compliqués en calculs mentaux.

(a) Calculez  $97 \times 103$  en utilisant l'identité  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

*Indication* :  $97 = 100 - 3$  et  $103 = 100 + 3$ .

(b) Calculez  $998 \times 1002$  de la même façon.

(c) Calculez  $47 \times 53$  et  $196 \times 204$ .

(d) Inventez trois produits de votre choix et calculez-les mentalement.

(e) Pourquoi cette méthode fonctionne-t-elle si bien quand les deux nombres sont symétriques par rapport à un nombre rond ?

(f) Essayez maintenant  $99^2$ . Quelle identité utiliser ?

*Indication* :  $99 = 100 - 1$ , donc  $99^2 = (100 - 1)^2 = \dots$

L'identité  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  transforme un produit de deux nombres « symétriques » autour d'un pivot en un carré moins un petit carré. Et  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  permet de calculer les carrés proches d'un nombre rond. Les identités remarquables ne sont pas des formules à mémoriser : ce sont des outils de calcul mental.

Compte rendu : (a)  $97 \times 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991$  (b)  $998 \times 1002 = (1000 - 2)(1000 + 2) = 1000000 - 4 = 999996$ . (c)  $47 \times 53 = 2500 - 9 - 2491 + 196 = 204 \times 10000 = 40000 - 16 = 39984$ . (e) Parce que  $a^2$  est un carré rond (facile à calculer) et  $b^2$  est petit. (f)  $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$ .

## EXPÉDITION 2 : LES SECRETS DU TRIANGLE DE PASCAL

Prérequis : étude 5.

Le triangle de Pascal a l'air simple : des 1 sur les bords, et chaque nombre est la somme des deux au-dessus. Mais ce triangle cache des régularités remarquables.

- (a) Construisez les 8 premières lignes du triangle (de  $n = 0$  à  $n = 7$ ).  
 (b) Calculez la somme des nombres de chaque ligne. Que remarquez-vous ?

Indication : Ligne 0 : 1. Ligne 1 :  $1 + 1 = 2$ . Ligne 2 :  $1 + 2 + 1 = 4$ . Continuez.

- (c) Regardez la deuxième diagonale (celle qui commence par 1, 2, 3, 4, ...). Quelle suite reconnaissez-vous ?

- (d) Regardez la troisième diagonale (celle qui commence par 1, 3, 6, 10, ...). Comment s'appellent ces nombres ?

Indication : Ce sont les nombres de la forme  $1 + 2 + 3 + \dots + k$ . On les appelle les nombres triangulaires.

- (e) Additionnez les diagonales montantes. Pour les repérer : partez du 1 le plus à gauche de chaque ligne, et remontez en diagonale vers la droite en passant à la ligne du dessus à chaque pas. Première diagonale : le 1 tout en haut (seul). Deuxième : le 1 à gauche de la ligne  $n = 1$  (seul). Troisième : le 1 à gauche de la ligne  $n = 2$  et le 1 de droite de la ligne  $n = 1$ , soit  $1 + 1 = 2$ . Continuez. Quelle suite apparaît ?

Indication : Diag. 1 : 1. Diag. 2 : 1. Diag. 3 :  $1 + 1 = 2$ . Diag. 4 :  $1 + 2 = 3$ . Diag. 5 :  $1 + 3 + 1 = 5$ . Diag. 6 :  $1 + 4 + 3 = 8$ . Reconnaissez-vous la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ?

- (f) Pourquoi la somme de la ligne  $n$  vaut-elle  $2^n$  ?

Indication :  $(1 + 1)^n = \sum \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum \binom{n}{k}$ .

Le triangle de Pascal contient les entiers naturels non nuls ( $2^{\text{e}}$  diagonale), les nombres triangulaires ( $3^{\text{e}}$  diagonale), la suite de Fibonacci (diagonales montantes), et les puissances de 2 (sommes de lignes). Un triangle de nombres aussi simple engendre une richesse combinatoire étonnante. On le retrouvera en probabilités (loi binomiale), en analyse (développements limités, au volume suivant), et en théorie des nombres.

Compte rendu 2 : (b) Sommes : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 =  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^7$ .  
 (c) Les entiers naturels non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, ... (d) Les nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28. (e) La suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. (f) Parce que  $(1+1)^n = 2^n$ , et  $(1+1)^n$  développé par le binôme donne la somme des coefficients  $\binom{n}{k}$ .

### EXPÉDITION 3 : POURQUOI $(1,01)^n$ GROSSIT SI VITE

Prérequis : études 3, 5.

Une augmentation de 1 % par an semble dérisoire. Mais après 100 ans ?

(a) Calculez  $(1,01)^2$  à la main (identité  $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$  avec  $x = 0,01$ ).

(b) Calculez  $(1,01)^{10}$  à la calculatrice. Comparez avec  $1 + 10 \times 0,01 = 1,10$ .

(c) Calculez  $(1,01)^{100}$ . Comparez avec  $1 + 100 \times 0,01 = 2$ .

Indication : Utilisez la touche puissance de la calculatrice, puis comparez les deux résultats.

(d) À la calculatrice, calculez  $(1,01)^{365}$  (un an de croissance quotidienne à 1 %). Le résultat vous surprendra.

(e) Maintenant essayez  $(1,001)^{1000}$  et  $(1,0001)^{10000}$ . Vers quelle valeur semblent converger ces nombres ?

Indication : Comparez avec  $e \approx 2,71828 \dots$

(f) Pourquoi, pour un taux  $x > 0$  et un entier  $n \geq 2$ , a-t-on  $(1+x)^n > 1 + nx$  ?

Indication :  $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots$ . Le terme  $nx$  est la croissance linéaire. Les termes suivants ( $\binom{n}{2}x^2$ , etc.) sont le bonus de la composition.

Pour un taux  $x > 0$  fixé,  $(1+x)^n$  croît beaucoup plus vite que  $1 + nx$  dès que  $n$  est grand. La différence vient des termes croisés du binôme : les

intérêts produisent eux-mêmes des intérêts. C'est la croissance composée, l'idée derrière les intérêts bancaires et la croissance démographique; avec un taux négatif, la même formule décrit la décroissance radioactive. Et quand  $x = 1/n$  avec  $n \rightarrow \infty$ ,  $(1 + 1/n)^n$  converge (résultat admis ici, que ces essais ne démontrent pas) vers le nombre  $e \approx 2,718$ , l'une des constantes les plus importantes de toute l'analyse.

Compte rendu 3 : (a)  $(1,01)^2 = 1 + 0,02 + 0,0001 = 1,0201$ . (b)  $(1,01)^{10} \approx 1,10462$ , contre 1,10 linéaire (+0,42 % par rapport à la valeur linéaire). (c)  $(1,01)^{100} \approx 2,7048$ , contre 2 linéaire (+35 % de bonus). (d)  $(1,01)^{365} \approx 37,78$  (un taux quotidien de 1 % multiplié par 37 en un an). (e)  $(1,001)^{1000} \approx 2,7169$ , (f)  $(1,0001)^{10000} \approx 2,71815$ . Convergence vers  $e \approx 2,71828$ . (f) Pour  $x < 0$  et  $n \geq 2$ , les termes  $\binom{n}{2} x^2 + \dots + 1$  du binôme sont strictement positifs :  $(1 + x)^n > 1 + nx$ . Pour  $x = 0$  ou  $n = 1$ , il y a égalité.

## LECTURES COMPLÉMENTAIRES

- **Euler, L.** (1770), *Vollständige Anleitung zur Algebra* (traduction française, *Éléments d'algèbre*, 1774). *Le manuel fondateur du calcul algébrique élémentaire.*
- **Klein, F.** (1908), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, vol. I (traduction anglaise, *Macmillan*, 1932). *L'arithmétique et l'algèbre revisitées avec le recul du mathématicien.*
- **Courant, R. & Robbins, H.** (1941), *What Is Mathematics?*, Oxford UP. *Panorama vivant, du nombre au calcul.*